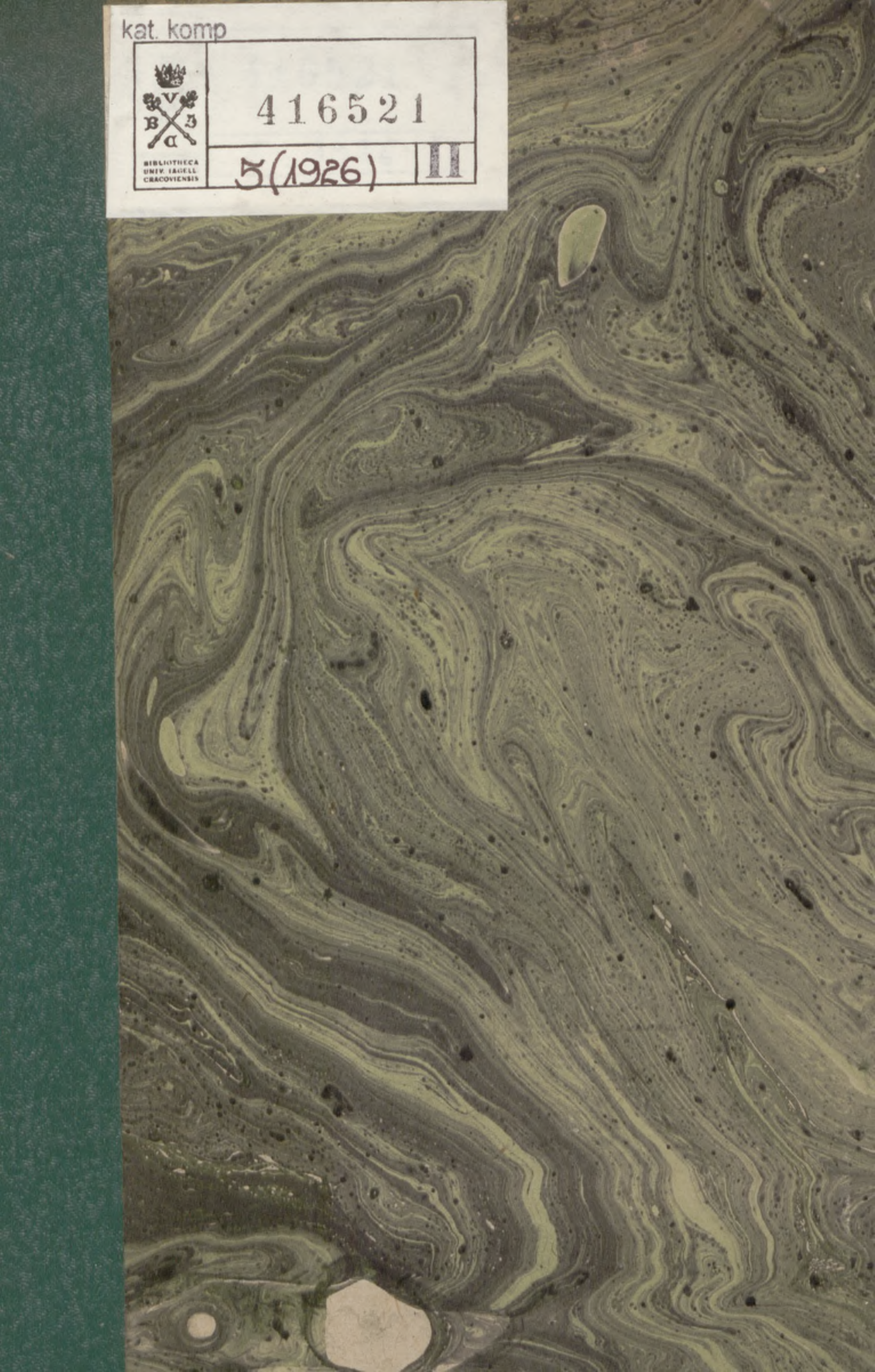

kat. komp
BIBLIOTHECA UNIV. IAGELL. CRACOVIENSIS
416521
5(1926)
II


V
B J
C
416521
II

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ß

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME V

ANNÉE 1926

KRAKÓW 1927
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME V

ANNÉE 1926



KRAKÓW 1927
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO



Printed in Poland

*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

*

Reprodukcja fotooffsetowa, 1962

Zakład Graficzny PWN, Łódź, Gdańska 162

Extrait d'une lettre adressée par le Professeur T. H. Hildebrandt (Université d'Ann Arbor) à M. Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

...You do not mention the matter of independence of the postulates for the family of abstract vectors in your memoir [1]), and for the remainder of the memoir this question is really not essential. It may howover be interesting to you that postulates 4·7 and 8 can readily be deduced from the other twelve. This seems to be due mainly to postulates 13, 14 and 15.

The proofs are as follows:

By way of preliminary we note that from postulates 14 and 15, it follows that $0 . \xi = 0$, and from this by the use of postulates 10 and 11, we have

$$\xi + (-1)\xi = (1-1)\xi = 0.$$

Assume now

$$\xi + \eta = \xi + \varrho$$

Then

$$(-1)\xi + (\xi + \eta) = (-1)\xi + (\xi + \varrho)$$

or, by the associative postulate 3:

$$\{(-1)\xi + \xi\} + \eta = \{(-1)\xi + \xi\} + \varrho.$$

From the preliminary remark, and postulate 5, we have then

$$\eta = \varrho$$

[1]) Sur une définition géométrtque des espaces abstraits affines (Ann. Soc. Polonaise Math., 1925, t. IV, pp. 1—33. Voir aussi. Les Espaces Abstraits Topologiquement Affines. Acta Mathematica, vol. 47 (1925), pp. 26—52.

i. e. the conclusion of postulate 4.

Assume next the hypothesis of 7:

$$a\,\xi = a \,.\, \eta \,.$$

Then

$$a \,.\, \xi + (-a) \,.\, \eta = a \,.\, \eta + (-a) \,.\, \eta = 0$$

by a use of postulates 10, 14 and 15. Then from 14, we have:

$$\| a \,.\, \xi + (-a) \,.\, \eta \| = 0$$

Now by 12 and 9

$$a \,.\, \xi + (-a) \,.\, \eta = a \{\xi + (-1)\, \eta\}$$

so that hy 14

$$a = 0 \quad \text{or} \quad \xi + (-1)\, \eta = 0 \,.$$

Aussuming $a \neq 0$, and applying postulaths 3, 10 and 11, as in the deduction of postulate 4 above, we get:

$$\xi = \eta$$

Finally, from the hypothesis of postulate 8

$$a \,.\, \xi = b \,.\, \xi$$

it follows apparently

$$a\,\xi + (-b)\, \xi = 0$$

o that

$$\| a \,.\, \xi + (-b)\, \xi \| = 0$$

Applying postulates 10 and 15

$$| a - b | \,.\, \| \xi \| = 0$$

so that by 14, either

$$a = b \quad \text{or} \quad \xi = 0$$

3 Aout 1926.

Sur un groupe de transformations qui se présente en électrodynamique[1]).

Par

S. Zaremba

Professeur à l'université de Cracovie.

Les équations qui subsistent entre des éléments qui ont une signification physique jouissent ordinairement de certaines propriétés d'invariance faciles à apercevoir avec sûreté a priori. D'autre part, des propriétés de ce genre bornent à elles seules, d'une façon considérable, la variété des hypothèses admissibles, en ce qui concerne la forme des équations correspondantes.

Par conséquent, dans la recherche des équations de la Physique, il serait peut être avantageux de commencer par tirer parti des propriétés d'invariance des équations demandées d'une façon plus systématique qu'on ne le fait d'ordinaire. C'est ce que je me propose de faire voir sur un exemple qui présente peut-être quelque intérêt.

Dans ce qui va suivre, j'adopterai la conception traditionnelle de l'espace-temps parce que, jusqu'à présent, on ne sait pas, comme je l'ai fait voir ailleurs[2]), établir, d'une façon satisfaisante, une correspondance entre les valeurs numériques des grandeurs considérées dans la théorie de la relativité et des opérations de mesure.

1. Pour définir un champ électromagnétique *(C)*, dans le vide, il suffit de choisir un système de coordonnées déterminé *(S)* et de faire connaître deux vecteurs comme fonctions du temps t et des

---

[1]) Des circonstances imprévues ayant retardé considérablement la publication des C. R. du Congrès de Toronto, je publie ici la communication que j'avais faite à ce Congrès en y joignant une addition où je démontre quelques propositions qui n'ont pu être qu'énoncées dans le corps de la communication.

[2]) S. Zaremba. La théorie de la Relativité et les faits observés. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1922, p. 105.

coordonnées x_1, x_2, x_3 de l'origine de chacun d'eux; l'un de ces vecteurs, soit e, représentera alors la force électrique au point (x_1, x_2, x_3) à l'époque t, c'est-à-dire la force qui solliciterait à l'époque t un point matériel M chargé de l'unité d'électricité et situé au point (x_1, x_2, x_3); quant au second vecteur, soit m, il représentera la force magnétique au point et à l'époque considérées, c'est-à-dire la force qui solliciterait à l'époque t un pôle magnétique P, d'intensité égale à l'unité, situé au point (x_1, x_2, x_3). Les définitions précédentes impliquent que, par rapport au système de coordonnées (S) (que nous allons nous représenter comme un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires), les vitesses du point M et du pôle P sont nulles. Nous avons formulé les définitions considérées de façon à ce que la circonstance précédente se présente parce que la force dérivant du champ et sollicitant un point électrisé dépend en général non seulement de sa position à l'époque considérée, mais aussi de sa vitesse par rapport au système de coordonnées (S) et qu'il en est peut-être de même pour un pôle magnétique. Cela posé, il est indiqué de donner aux vecteurs e et m les noms de force électrique et force magnétique du champ (C) *relatives* au système de coordonnées (S); c'est ce que nous allons faire dorénavant.

Voici maintenant un problème qui se présente de lui-même: *Connaissant la force électrique e et la force magnétique m d'un champ électromagnétique (C) relatives à un système de coordonnés déterminé (S), déterminer les éléments analogues e' et m', relatifs à un système de coordonnées (S') qui se déplace d'une façon donnée par rapport au système (S).*

Je me propose d'étudier ce problème dans le cas particulier où le système (S') est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au système S.

2. Les notations précédentes étant conservées, désignons par, u la vitesse constante du système (S') par rapport au système (S). Nous admettrons ce qu'admettent d'une façon plus ou moins explicite tous les physiciens, à savoir que la solution de notre problème peut être représentée par l'ensemble des deux équations vectorielles suivantes:

$$(1) \qquad \begin{cases} e' = \varphi(e, m, u) \\ m' = \psi(e, m, u) \end{cases}$$

où φ et ψ représentent des caractéristiques qu'il s'agit de déterminer.

Désignons d'une façon générale par

$$e'_i, m'_i, e_i, m_i, u_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les projections orthogonales respectives des vecteurs e', m', e, m, et u sur l'axe de numéro i dans le système de coordonnées (S). Chacune des équations vectorielles (1) se décomposera en trois équations scalaires de sorte, qu'en définitive, nous aurons le système suivant de six équations scalaires:

$$(2) \qquad \begin{cases} e'_i = \varphi_i(e_1, e_2, e_3, m_1, m_2, m_3, u_1, u_2, u_3) \\ m'_i = \psi_i(e_1, e_2, e_3, m_1, m_2, m_3, u_1, u_2, u_3) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Voici d'abord une proposition qui résulte immédiatement de la nature vectorielle des égalités (1):

(A) Si l'on désigne par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les projections orthogonales d'un vecteur quelconque sur les axes du système S, chacune des expressions:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{3} \xi_i \varphi_i(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1, \ldots)$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{3} \xi_i \psi_i(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1, \ldots)$$

représentera un invariant du groupe des rotations.

Pour aller plus loin, considérons un troisième système de coordonnées (S'') animé, par rapport au système (S'), d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme avec une vitesse u'. Désignons par

$$e''_i, m''_i, u'_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les projections orthogonales respectives sur l'axe de numéro i, dans le système (S), des forces électrique e'' et magnétique m'' du champ (C), relatives au système (S''), ainsi que celle du vecteur u'. Pour obtenir les expressions des e''_i et m''_i en fonction des quantités

$$e'_k, m'_k, u'_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

il suffit évidemment de substituer, dans les équations (2), aux symboles:

$$e'_i, m'_i, e_i, m_i, u_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

respectivement les symboles

$$e''_i, m''_i, e'_i, m'_i, u'_i.$$

Nous aurons donc:

$$(5) \qquad \begin{cases} e''_i = \varphi_i(e'_1, \ldots, m'_1, \ldots, u'_1, \ldots) \\ m''_i = \psi_i(e'_1, \ldots, m'_1, \ldots, u'_1, \ldots) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Cherchons maintenant les expressions des e_i'' et m_i'' au moyen des quantités

$$e_i, m_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il y a deux manières d'obtenir les formules demandées:

1° On peut porter les valeurs (2) des e_i' et m_i' dans les formules (5).

2° Le système (S'') se déplaçant par rapport au système (S) avec une vitesse dont les projections orthogonales sur les axes de ce système ont les valeurs

$$u_i + u_i' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

on obtiendra encore les formules demandées en substituant, dans les formules (2), aux symboles

$$e_i', m_i', u_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les symboles

$$e_i'', m_i'', u_i + u_i' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} e_i'' &= \varphi_i(e_1 \ldots, m_1 \ldots, u_1 + u_1', \ldots) \\ m_i'' &= \psi_i(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1 + u_1', \ldots) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Evidemment, les deux procédés doivent conduire aux mêmes expressions des e_i'' et m_i''. Cela posé, on reconnaît sans peine que l'on a la proposition suivante:

(**B**) L'ensemble des formules (2) définit un groupe G de transformations ponctuelles bi-univoques à trois paramètres u_1, u_2, u_3 de l'espace arithmétique à 6 dimensions; dans ce groupe, les paramètres du produit de deux transformations sont toujours égaux aux sommes des paramètres homologues des facteurs.

Le groupe désigné par G dans l'énoncé précédent jouit encore évidemment de la propriété que voici:

(**C**) Le groupe G contient la transformation identique et cette transformation correspond aux valeurs nulles des paramètres.

3. Pour appliquer la méthode de Sophus Lie à la détermination des transformations du groupe G, il suffirait de connaître les fonctions.

$$\xi_{si} \text{ et } \eta_{si} \qquad (s, i = 1, 2, 3)$$

définies par les formules:

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} \xi_{s\,i} = \left(\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial u_i}\right)_{u_1 = u_2 = u_3 = 0} \\ \eta_{s\,i} = \left(\dfrac{\partial \psi_s}{\partial u_i}\right)_{u_1 = u_2 = u_3 = 0.} \end{array} \right.$$

En effet, dans ce cas, les fonctions cherchées seraient définies sans ambiguité par les conditions suivantes:

1⁰ Chacune de ces fonctions devra être une intégrale commune du système jacobien:

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{s=1}^{3} \xi_{s\,i} \frac{\partial f}{\partial e_s} + \sum_{s=1}^{3} \eta_{s\,i} \frac{\partial f}{\partial m_s} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

2⁰ Pour

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

et en vertu de la proposition (**C**), les fonctions φ_s et ψ_s $(s = 1, 2, 3)$ devront se réduire respectivement à e_s et m_s.

Cherchons donc les expressions des $\xi_{s\,i}$ et des $\eta_{s\,i}$.

A cet effet posons:

$$(9) \qquad I = \sum_{s=1}^{3} \xi_s \varphi_s(e_1, \ldots, m_1, \ldots, u_1, \ldots)$$

Les formules (7) et (9) nous donneront alors:

$$(10) \qquad \xi_{s\,i} = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi_s \, \partial u_i}\right)_{u_1 = u_2 = u_3 = 0} \qquad (s, i = 1, 2, 3).$$

Pour aller plus loin, adoptons la convention suivante: un symbole de la forme F_i étant défini seulement pour les valeurs 1, 2 et 3 de l'indice i, nous considèrerons le symbole F_k, où k représente un entier quelconque, comme défini par la formule:

$$F_k = F_i$$

où i représente l'entier déterminé par l'ensemble des relations

$$i \equiv k \qquad (\text{mod. } 3)$$
$$1 \leqq i \leqq 3$$

Posons maintenant

$$(11) \qquad n_i = e_{i+1}\,,\ m_{i+2} - e_{i+2},\ m_{i+1} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La fonction I, définie par la formule (9), étant, en vertu de la proposition (**A**), un invariant du groupe des rotations, il résulte

des formules (10) que les ξ_{ik} sont les composantes d'un tenseur du 2-e degré. Cela posé, on trouve:

(12) $$\xi_{si} = e_s f_1(i) + m_s f_2(i) + n_s f_3(i)$$

en posant

(13) $$f_k(i) = p_{k1} e_i + p_{k2} m_i + p_{k3} n_i \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

où les p'_{kt} sont des invariants du groupe des rotations, fonctions des seules variables e_i et m_i, $(i = 1, 2, 3)$. Cela posé, j'observe que les fonctions α_i $(i = 1, 2, 3)$ définies par les formules

(14) $$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{3} e_k^2, \; \alpha_2 = \sum_{k=1}^{3} m_k^2, \; \alpha_3 = \sum_{k=1}^{3} e_k m_k$$

constituent un système complet d'invariants indépendants des variables e_k et m_k par rapport au groupe des rotations. Il résulte de là que les p_{kt} pourront être regardés comme fonctions des seules variables α.

D'une façon tout à fait analogue on trouve:

(15) $$\eta_{si} = e_s \varphi_1(i) + m_s \varphi_2(i) + n_s \varphi_3(i),$$

en posant

(16) $$\varphi_k(i) = q_{k1}, e_i + q_{k2}, m_i + q_{k3} n_i$$

où les q représentent des fonctions des seules variables α.

Pour résoudre notre problème dans toute sa généralité, il faudrait déterminer d'abord, de la façon la plus générale, les p et les q par la condition que le système (8) soit un système jacobien, ce qui exigerait l'intégration d'un système compliqué d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, et passer ensuite à l'intégration du système (8) lui-même. Toutefois, le problème se simplifie beaucoup quand on veut se borner au degré de généralité qui semble suffisant au point de vue de la physique.

En effet, d'après les hypothèses généralement admises, la différence

$$e' - e$$

où e' est défini par la première des formules (1), représente un vecteur perpendiculaire à la vitesse u. D'autre part, il semble naturel d'admettre qu'il en est de même du vecteur:

$$m' - m.$$

Or, les hypothèses précédentes étant adoptées, on trouve que

l'on a

(17) $$\xi_{ik} + \xi_{ki} = 0,\ \eta_{ik} + \eta_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Posons

(17,₁) $$\lambda_i(f) = \sum_{s=1}^{3} \xi_{s,i} \frac{\partial f}{\partial e_s} + \sum_{s=1}^{3} \eta_{s,i} \frac{\partial f}{\partial m_s}.$$

En vertu des équations (17) les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (8) soit un système jacobien prendront la forme suivante:

(18) $$\lambda_i(\xi_{s,k}) = \lambda_i(\eta_{s,k}) = 0 \qquad (i, k, s = 1, 2, 3).$$

Il résulte immédiatement de là que les formules (2) s'écriront comme il suit:

(19) $$\begin{cases} e_i' = \sum_{k=1}^{3} \xi_{ik} u_k + e_i \\ m_i' = \sum_{k=1}^{3} \eta_{ik} u_k + m_i \end{cases}$$

En effet, à cause des équations (18) les valeurs (19) des e' et des m', seront des intégrales communes des équations (8). D'autre part, pour

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

les formules (18) donnent

$$e_i' = e_i,\ m_i' = m_i$$

et cela achève de prouver que les formules (18) sont bien les formules cherchées.

4. D'après ce qui précède, le problème se ramène à la détermination des ξ_{ik} et des η_{ik}.

Les conditions (17) donnent:

(19,₁) $$\begin{cases} p_{i,i} = q_{i,i} = 0 \\ p_{i,i+1} + p_{i+1,i} = 0 \\ q_{i,i+1} = q_{i+1,i} = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et, en définitive, on trouve que les formules (12) et (15) peuvent être ramenées à la forme suivante:

(20) $$\begin{cases} \xi_{i,i} = \eta_{ii} = 0 \\ -\xi_{i+1,i} = \xi_{i,i+1} = p_1 e_{i+2} + p_2 m_{i+2} + p_3 n_{i+2} \\ -\eta_{i+1,i} = \eta_{i,i+1} = q_1 e_{i+2} + q_2 m_{i+2} + q_3 n_{i+2} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

où les p_k et les q_k $(k = 1, 2, 3)$ représentent des fonctions des seules variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, variables définies par les formules (14). Les équations qui déterminent ces fonctions s'obtiennent en développant les conditions (18). Pour écrire les équations précédentes, posons

$$
(21) \quad \left\{ \begin{array}{c} \Delta = \alpha_1,\ \alpha_2 - \alpha_3^2. \\ M = q_1 \alpha_1 - p_2 \alpha_2 + (q_2 - p_1)\alpha_3, \\ A = p_2(p_1 + q_2),\ B = p_1^2 + p_2 q_1,\ A' = q_1(p_1 + q_2), \\ B' = q_2^2 + p_2 q_1, \end{array} \right.
$$

et définissons trois opérateurs différentiels μ_1, μ_2 et μ_3 par les formules:

$$
(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = -2 p_3 \alpha_3 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} - 2 q_3 \alpha_2 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} - (p_3 \alpha_2 + q_3 \alpha_3) \dfrac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ \mu_2 = \quad 2 p_3 \alpha_3 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2 q_3 \alpha_3 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} + (p_3 \alpha_3 + q_3 \alpha_1) \dfrac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ \mu_3 = -2 p_2 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2 q_1 \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} + (p_1 - q_2) \dfrac{\partial}{\partial \alpha_3} \end{array} \right.
$$

les équations demandées pourront alors se mettre sous la forme suivante:

$$
(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\mu_1(p_1) - p_3 q_1) + \alpha_2 p_3 M = 0 \\ \Delta(\mu_2(p_1) + 2 p_3 p_1 + q_3 p_2) - \alpha_3 p_3 M = 0 \\ \Delta\ \mu_3(p_1) - \alpha_2 A - \alpha_3 B = 0 \\ \Delta(\mu_1(p_2) - p_3 p_1 - p_3 q_2 - q_3 p_2) - \alpha_3 p_3 M = 0 \\ \Delta(\mu_1(p_2) + p_3 p_2) + \alpha_1 p_3 M = 0 \\ \Delta\ \mu_3(p_2) + \alpha_3 A + \alpha_1 B = 0 \\ \Delta(\mu_1(p_3) - p_3 q_3) + \alpha_2 A + \alpha_3 B = 0 \\ \Delta(\mu_2(p_3) + p_3^2) - \alpha_3 A - \alpha_1 B = 0 \\ \Delta\ \mu_3(p_3) + p_3 M = 0 \\ \Delta(\mu_1(q_1) - q_3 q_1) + \alpha_2 q_3 M = 0 \\ \Delta(\mu_2(q_1) + p_3 q_1 + q_3 p_1 + q_3 q_2) - \alpha_3 q_3 M = 0 \\ \Delta\ \mu_3(q_1) - \alpha_3 A' - \alpha_2 B' = 0 \\ \Delta(\mu_1(q_2) - p_3 q_1 - 2 q_3 q_2) - \alpha_3 q_3 M = 0 \\ \Delta(\mu_2(q_2) + q_3 p_2) + \alpha_1 q_3 M = 0 \\ \Delta\ \mu_3(q_2) + \alpha_1 A' + \alpha_2 B' = 0 \\ \Delta(\mu_2(q_3) - q_3^2) + \alpha_3 A' + \alpha_2 B' = 0 \\ \Delta(\mu_2(q_3) + q_3 p_3) - \alpha_1 A' - \alpha_3 B' = 0 \\ \Delta\ \mu_3(q_3) + q_3 M = 0. \end{array} \right.
$$

Sans insister, pour le moment, sur la discussion un peu laborieuse du système précédent et en réservant pour un autre travail quelques applications des résultats obtenus, je me bornerai actuellement à faire remarquer que, si l'on adopte l'une des hypothèses sur lesquelles M. Lorenz [1]) a fondé la théorie des électrons, hypothèse qui revient à admettre que

$$p_1 = p_3 = 0, \quad p_2 \neq 0$$

on trouve

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

ce qui exprime que, par rapport au groupe défini par les équations (18), la force magnétique est un invariant.

Addition.

Voici quelques indications destinées à faciliter la vérification des résultats présentés dans la communication précédente.

Pour établir les formules (12) et (15), p. 8, on peut procéder comme il suit: les n_i étant définis par la formule (11) et la quantité Δ par la première des formules (21), on aura:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e_1, & e_2, & e_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{vmatrix} \tag{24}$$

et l'on s'assurera sans peine que l'on a

$$\Delta = e_s(\alpha_2 e_s - \alpha_3 m_s) + m_s(\alpha_1 m_s - \alpha_3 e_s) + n_s^2, \quad (s = 1, 2, 3) \tag{25}$$

d'où il résulte que l'on a aussi

$$\Delta = \sum_{s=1}^{3} e_s(\alpha_2 e_s - \alpha_3 m_s) = \sum_{s=1}^{3} m_s(\alpha_1 m_s - \alpha_3 e_s) = \sum_{s=1}^{3} n_s^2 \tag{26}$$

Il est évident d'ailleurs que, dans le tableau

---

[1]) H. A. Lorenz. The theory of of electrons. Leipzig, B. G. Teubner 1909, p. 14, formule (23).

$$(27)\qquad \begin{cases} \alpha_2 e_1 - \alpha_3 m_1, & \alpha_2 e_2 - \alpha_3 m_2, & \alpha_2 e_3 - \alpha_3 m_3 \\ \alpha_1 m_1 - \alpha_3 e_1, & \alpha_1 m_2 - \alpha_3 e_2, & \alpha_1 m_3 - \alpha_3 e_3 \\ n_1, & n_2, & n_3, \end{cases}$$

les éléments d'une même ligne constituent les composantes d'un même vecteur. D'autre part, puisque les quantités ξ_{si} sont les composantes d'un même tenseur du second degré, les expressions

$$\sum_{s=1}^{3} v_s \xi_{si}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

où les v_1 représentent les composantes d'un même vecteur quelconque, représenteront elles-mêmes les composantes d'un certain vecteur. Par conséquent, les quantités

$$(28)\qquad f_k(1), \quad f_k(2), \quad f_k(3),$$

définies par les équations

$$(29)\qquad \begin{cases} \sum_{s=1}^{3} (\alpha_2 e_s - \alpha_3 m_s) \xi_{si} = f_1(i) \,.\, \Delta \\ \sum_{s=1}^{3} (\alpha_1 m_s - \alpha_3 e_s) \xi_{si} = f_2(i) \,.\, \Delta \\ \sum_{s=1}^{3} n_s \xi_{si} = f_3(i) \,.\, \Delta, \end{cases}$$

représenteront les composantes d'un même vecteur pour chacune des valeurs 1, 2 et 3 de l'indice k. Cela étant, les quantités p_{ki} définies par les équations

$$(30)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} (\alpha_2 e_i - \alpha_3 m_i) f_k(i) = p_{k1}, \\ \sum_{i=1}^{3} (\alpha_1 m_i - \alpha_3 e_i) f_k(i) = p_{k2}, \\ \sum_{i=1}^{3} n_i f_k(i) = p_{k3}, \end{cases}$$

représenteront chacune un invariant du groupe des rotations et, par conséquent, chacune de ces quantités sera fonction des seules grandeurs α_1, α_2 et α_3. Or, l'ensemble des équations (29) et (30) entraîne les formules (12) qu'il s'agissait d'établir. Quant aux formules (15) p. 8, on les obtiendra d'une façon tout à fait analogue. Démontrons maintenant que l'hypothèse selon laquelle le vecteur u serait, dans tous les cas, perpendiculaire à chacun des vecteurs $e' - e$ et $m' - m$, entraîne bien l'existence des relations (17). A cet effet adoptons l'hypothèse précédente.

Nous aurons:

$$\sum_{s=1}^{3} u_s(e'_s - e_s) = 0 \text{ et } \sum_{s=1}^{3} u_s(m'_s - m_s) = 0,$$

pour tous les systèmes de valeurs de u_1, u_2, u_3. Par conséquent:

$$\sum_{s=1}^{3} u_s \frac{\partial e'_s}{\partial u_k} + e'_k - e_k = 0 \text{ et } \sum_{s=1}^{3} u_s \frac{\partial m'_s}{\partial u_k} + m'_k - m_k = 0,$$

d'où

$$\sum_{s=1}^{3} u_s \frac{\partial^2 e'_s}{\partial u_k \partial u_i} + \frac{\partial e'_i}{\partial u_k} + \frac{\partial e'}{\partial u_i} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{3} u_s \frac{\partial^2 m'_s}{\partial u_k \partial u_i} + \frac{\partial m'_i}{\partial u_k} + \frac{\partial m'_k}{\partial u_i} = 0.$$

Cela posé, il suffit de faire dans ces équations $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ et de se reporter aux formules (7), p. 7, pour s'assurer de l'existence des relations (17) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

Montrons maintenant qu'au cas où les relations (17) (p. 9) sont vérifiées, les conditions pour que le système (8), p. 7, soit un système jacobien prennent bien la forme (18). A cet effet observons que, avec les notations définies par les formules $(17,_1)$, les équations (8), p. 7, s'écrivent de la façon suivante:

(31) $$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \lambda_i(f) \qquad (i, = 1, 2, 3).$$

D'après un théorème classique, les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce système soit un système jacobien sont les suivantes:

(32) $$\lambda_k(\xi_{s\,i}) - \lambda_i(\xi_{s\,k}) = 0 \qquad (i, s, k = 1, 2, 3)$$

et

(33) $$\lambda_k(\eta_{s\,i}) - \lambda_i(\eta_{s\,k}) = 0 \qquad (i, s, k = 1, 2, 3).$$

L'une des relations (17) permet de donner à (32) la forme suivante:

$$\lambda_k(\xi_{s\,i}) + \lambda_i(\xi_{k\,s}) = 0.$$

En adjoignant à cette équation celles que l'on peut en déduire par voie de permutations circulaires des indices k, s, i, on obtient un système d'équations qui donne de suite

$$\lambda_k(\xi_{s,i}) = 0 \qquad (k, s, i = 1, 2, 3).$$

D'une façon tout à fait analogue les équations (33) nous donneront

$$\lambda_k(\eta_{s,i}) = 0 \qquad (k, s, i = 1, 2, 3)$$

En définitive, lorsque les relations (17), p. 9, sont vérifiées, les conditions considérées prennent bien la forme (18), p. 9.

Assurons-nous maintenant que les relations $(19,_1)$ sont bien équivalentes aux relations (17).

J'observe à cet effet que les relations (17) donnent en particulier

$$\xi_{ii} = 0,$$

égalité qui en vertu de (12) donne:

$$(34) \qquad \begin{aligned} p_{11}e_i^2 + p_{22}m_i^2 + p_{33}n_i^2 + (p_{23} + p_{32})m_i n_i + \\ + (p_{31} + p_{13})n_i e_i + (p_{12} + p_{21})e_i m_i = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit subsister quelle que soit l'orientation des axes. Or les valeurs des p_{ik} sont indépendantes de l'orientation des axes et, d'autre part, lorsqu'on fait varier l'orientation des axes, les valeurs que peuvent prendre à la fois les trois quantités e_i, m_i et n_i ne sont assujetties, dans le cas général où chacun des vecteurs *e* et *m* est différent de zéro et où ces deux vecteurs ne sont pas parallèles à une même droite, qu'à satisfaire à l'équation

$$(35) \qquad \alpha_2 e_i^2 + \alpha_1 m_i^2 + n_i^2 - 2\alpha_3 e_i m_i - \Delta = 0 \text{ [1)]}$$

où Δ est défini par la première des équations (21).

Par conséquent l'égalité (34) doit être une conséquence de (35). On a donc

$$p_{ik} + p_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

On établirait d'une façon analogue que les relations (17) entraînent encore les suivantes

$$q_{ik} + q_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

En définitive, les relations (17) entraînent les relations $(19,_1)$. Mais il est évident que les relations $(19,_1)$ entraînent les relations (17). Donc, les systèmes de relations (17) et $(19,_1)$ sont équivalentes entre elles comme il s'agissait de le démontrer.

[1)] Pour reconnaître l'existence de l'équation (35) il suffit de considérer que les éléments du tableau (27) représentent les coefficients des éléments homologues dans le déterminant (24).

Voici comment on obtient les formules (20): il résulte de $(19,_1)$ que l'on peut poser

$$p'_1 = p_{32} = -p_{23}, \quad p'_2 = p_{13} = -p_{31}, \quad p'_3 = p_{21} = -p_{12},$$

en désignant par les p'_i des invariants du groupe des rotations. Cela étant, la formule (12) donne:

$$(36) \qquad \xi_{i,i+1} = p'_1(m_{i+1}n_i - m_i n_{i+1}) + p'_2(n_{i+1}e_i - n_i e_{i+1}) + \\ + p'_3(e_{i+1}m_i - e_i m_{i+1}).$$

Or les expressions par lesquelles les p'_i sont multipliées respectivement dans la formule précédente représentent les coefficients de la colonne de rang $i+2$ dans le déterminant qui constitue le second membre de (24) et, d'autre part, ces coefficients sont égaux respectivement aux éléments de la colonne de rang $i+2$ dans le tableau (27); il résulte de là que l'expression (36) de $\xi_{i,i+1}$ peut être mise sous la forme

$$\xi_{i,i+1} = p_1 e_{i+2} + p_2 m_{i+2} + p_3 n_{i+2},$$

en désignant par les p_i les invariants du groupe des rotations définis par les formules

$$p_1 = p'_1\alpha_2 - p'_2\alpha_3, \quad p_2 = p'_2\alpha_1 - p'_1\alpha_3, \quad p_3 = p'_3.$$

Cela posé, pour reconnaître la légitimité des formules (20), il suffit de considérer qu'un raisonnement tout à fait analogue à celui que nous venons de développer conduirait à la formule

$$\eta_{i,i+1} = q_1 e_{i+2} + q_2 m_{i+2} + q_3 n_{i+2}$$

où les q_i représentent certains nouveaux invariants du groupe des rotations.

Pour terminer, développons les calculs qui au cas où l'on a les formules (20) permettent de conclure à l'équivalence du système (23) (p. 10) au système (18).

En vertu des formules $(17,_1)$ et (20) nous avons

$$(37) \qquad \begin{aligned} \lambda_i(f) = &-(p_1 e_{i+2} + p_2 m_{i+2} + p_3 n_{i+2})\frac{\partial f}{\partial e_{i+1}} + \\ &+(p_1 e_{i+1} + p_2 m_{i+1} + p_3 n_{i+1})\frac{\partial f}{\partial e_{i+2}} + \\ &-(q_1 e_{i+2} + q_2 m_{i+2} + q_3 n_{i+2})\frac{\partial f}{\partial m_{i+1}} + \\ &+(q_2 e_{i+1} + q_2 m_{i+1} + q_3 n_{i+1})\frac{\partial f}{\partial m_{i+2}}. \end{aligned}$$

Commençons par développer les expressions

$$\lambda_i(\alpha_k) \qquad\qquad (k = 1, 2, 3)$$

où les α_k ont les valeurs (14). En tenant compte du fait que les éléments d'une colonne du tableau (27) représentent les coefficients des éléments de la colonne homologue dans le déterminant (24), on trouve:

$$\lambda_i(\alpha_1) = -2p_3 e_i + 2p_3 \alpha_1 m_i - 2p_2 n_i$$
$$\lambda_i(\alpha_2) = -2q_3 \alpha_2 e_i + 2q_3 \alpha_3 m_i + 2q_1 n_i$$
$$\lambda_i(\alpha_3) = -(p_3 \alpha_2 + q_3 \alpha_3)e_i + (p_3 \alpha_3 + q_3 \alpha_1)m_i + (p_1 - q_2)n_i.$$

Cela posé, si l'on désigne par $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ une fonction quelconque des variables α_1, α_2 et α_3 et si l'on conserve aux opérateurs μ_1, μ_2 et μ_3 les sens que leur attribuent les formules (22), on trouve:

$$(38) \qquad \lambda_i(\psi) = \mu_1(\psi)e_i + \mu_2(\psi)m_i + \mu_3(\psi)n_i.$$

Développons encore les expressions $\lambda_i(n_i)$ et $\lambda_i(n_{i+2})$ où, on se le rappelle, on a

$$n_i = e_{i+1} m_{i+2} - e_{i+2} m_{i+1},$$
$$n_{i+2} = e_i m_{i+1} - e_{i+1} m_i.$$

En tenant compte, comme plus haut, des relations qui existent entre les éléments du tableau (27) et ceux du déterminant (24), on trouve:

$$(39) \qquad \lambda_i(n_i) = q_1 \alpha_1 - p_2 \alpha_2 + (q_2 - p_1)\alpha_3 - q_1 e_i^2 + p_2 m_i^2 + \\ + p_3 m_i n_i - q_3 n_i e_i + (p_1 - q_2) e_i m_i$$

et

$$(40) \qquad \lambda_i(n_{i+2}) = (p_1 m_i - q_1 e_i)e_{i+2} + (p_2 m_i - q_2 e_i)m_{i+2} + \\ + (p_3 m_i - q_3 e_i)n_{i+2}.$$

D'après les formules (20) (p. 9), nous avons:

$$\xi_{i,i+1} = p_1 e_{i+2} + p_2 m_{i+2} + p_3 n_{i+2}.$$

En s'appuyant sur cette formule ainsi que sur les formules (38) et (40), on développera aisément l'expression $\lambda_i(\xi_{i,i+1})$ et, après avoir éliminé de la formule obtenue le produit $n_i n_{i+1}$ au moyen de la relation

$$\alpha_2 e_i e_{i+2} + \alpha_1 m_i m_{i+2} - \alpha_3 (m_i e_{i+2} + e_i m_{i+2}) + n_i n_{i+2} = 0,$$

relation que l'on obtient en considérant que les éléments du tableau (27) sont égaux aux coefficients des éléments homologues du

déterminant (24), on obtiendra une formule qui, à la suite de la substitution à n_{i+1} de sa valeur $e_{i+2} m_i - e_i m_{i+2}$, nous donnera finalement la suivante:

$$
(41) \qquad \begin{aligned}
\lambda_i(\xi_{i,i+1}) = (p_1^2 + p_2 q_1) e_{i+1} + (p_1 p_2 + p_2 q_2) m_{i+1} + \\
+ e_i e_{i+2}\{\mu_1(p_1) - p_3 q_1 - \alpha_2 \mu_3(p)\} + \\
+ m_i m_{i+2}\{\mu_2(p_2) + p_3 p_2 - \alpha_1 \mu_3(p_3)\} + \\
+ m_i n_{i+2}\{\mu_2(p_3) + p_3^2\} + m_{i+2} n_i \mu_3(p_3) + \\
+ n_i e_{i+2} \mu_3(p_1) + n_{i+2} e_i \{\mu_1(p_3) - p_3 q_3\} + \\
+ e_i m_{i+2}\{\mu_1(p_2) - p_3 q_2 + \alpha_3 \mu_3(p_3) - p_1 p_3 - p_2 q_3\} + \\
+ e_{i+2} m_i \{\mu_2(p_1) + p_3 p_1 + \alpha_3 \mu_3(p_3) + p_1 p_3 + p_2 q_3\}.
\end{aligned}
$$

Développons maintenant l'expression $\lambda_i(\xi_{i+1,i+2})$. Nous avons {formules (20), p. 9}:

$$
\xi_{i+1,i+2} = p_1 e_i + p_2 m_i + p_3 n_i
$$

et, en nous appuyant sur (38) et (39) nous obtiendrons l'expression de $\lambda_i(\xi_{i+1,i+2})$ sous forme d'un polynome entier du second degré en e_i, m_i et n_i ayant pour coefficients certains invariants du groupe des rotations. Après avoir éliminé de l'expression précédente la quantité n_i^2 au moyen de la relation (35), on obtiendra les formules définitives suivante:

$$
(42) \qquad \begin{aligned}
\lambda_i(\xi_{i+1,i+2}) = p_3\{q_1 \alpha_1 - p_2 \alpha_2 + (q_2 - p_1)\alpha_3\} + \Delta \mu_3(p_3) + \\
+ e_i^2\{\mu_1(p_1) - p_3 q_1 - \alpha_2 \mu_3(p_3)\} + \\
+ m_i^2\{\mu_2(p_2) + p_2 p_3 - \alpha_1 \mu_3(p_3)\} + \\
+ m_i n_i \{\mu_3(p_2) + \mu_2(p_3) + p_3^2\} + \\
+ n_i e_i \{\mu_3(p_1) + \mu_1(p_3) - p_3 q_3\} + \\
+ e_i m_i \{\mu_2(p_1) + \mu_1(p_2) + p_3(p_1 - q_2) + 2\alpha_3 \mu_3(p_3)\}.
\end{aligned}
$$

L'équation

$$
(43) \qquad \lambda_i(\xi_{i+1,i+2}) = 0
$$

doit être vérifiée quelle que soit l'orientation des axes; d'autre part, ainsi que nous avons déjà eu l'occasion de le faire remarquer, lorsque l'orientation des axes varie, les vecteurs e et m étant donnés, les valeurs que peuvent prendre à la fois les quantités e_i, m_i et n_i ne sont assujetties, dans le cas général, qu'à satisfaire à l'équation (35). Par conséquent, il résulte de (42) que, pour que l'équation (43) soit satisfaite dans les conditions voulues, il faut et il suffit que l'on ait:

$$(44)\quad \begin{cases} p_3\{q_1\alpha_1 - p_2\alpha_2 + (q_2 - p_1)\alpha_2\} + \Delta\mu_3(p_3) = 0 \\ \mu_1(p_1) - p_3 q_1 - \alpha_2\mu_3(p_3) = 0 \\ \mu_2(p_2) + p_2 p_3 - \alpha_1\mu_3(p_3) = 0 \\ \mu_3(p_2) + \mu_2(p_3) + p_3^2 = 0 \\ \mu_3(p_1) + \mu_1(p_3) - p_3 q_3 = 0 \\ \mu_2(p_1) + \mu_1(p_2) + p_3(p_1 - q_2) + 2\alpha_3\mu_3(p_3) = 0. \end{cases}$$

A cause de la 2-ième et de la 3-ième des équations (44) le coefficient de $e_i e_{i+2}$ ainsi que celui de $m_i m_{i+2}$ dans l'expression (41) de $\lambda(\xi_{i,i+1})$ sont identiquement nuls et, à cause de cela, après avoir posé

$$(45)\quad \begin{cases} A_1 + \mu_2(p_3) + p_3^2, \qquad B_1 = \mu_3(p_2), \\ A_2 = \mu_3(p_1), \qquad B_2 = \mu_1(p_3) - p_3 q_3, \\ A_3 = \mu_1(p_2) - p_3 q_2 + \alpha_3\mu_3(p_3) - p_1 p_3 - p_2 q_3, \\ B_3 = \mu_2(p_1) + p_3 p_1 + \alpha_3\mu_3(p_3) + p_1 p_3 + p_2 q_3 \end{cases}$$

l'équation

$$(46)\qquad \lambda_i(\xi_{i,i+1}) = 0$$

prendra la forme suivante:

$$(47)\quad \begin{cases} (p_1^2 + p_2 q_1)e_{i+1} + (p_1 p_2 + p_2 q_2)m_{i+1} + \\ + A_1 m_i n_{i+2} + B_1 m_{i-2} n_i + \\ + A_2 n_i e_{i+2} + B_2 n_{i+2} e_i + \\ + A_3 e_i m_{i+2} + B_3 e_{i+2} m_i = 0. \end{cases}$$

Mais, avec les notations (45), les trois dernières équations du système (44) s'écrivent comme il suit:

$$(48)\quad \begin{cases} A_1 + B_1 = 0, \\ A_2 + B_2 = 0, \\ A_3 + B_3 = 0. \end{cases}$$

Il résulte de là que l'équation (47) équivant à la suivante:

$$\begin{aligned} &(p_1^2 + p_2 q_1)e_{i+2} + (p_1 p_1 + p_2 q_2)m_{i+2} + \\ &+ A_1(m_i n_{i+2} - m_{i+2} n_i) + \\ &+ A_2(n_i e_{i+2} - n_{i+2} e_i) + \\ &+ A_3(e_i m_{i+2} - e_{i+2} m_i) = 0, \end{aligned}$$

laquelle, à cause des relations qui existent entre les éléments du tableau (27) et les éléments du déterminant (24), peut se mettre sous la forme suivante:

$$e_{i+1}\{p_1^2 + p_2 q_1 - \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2\} +$$
$$+ m_{i+1}\{p_1 p_2 + p_2 q_2 + \alpha_3 A_1 - \alpha_1 A_2\} - n_i A_3 n_{i+1} = 0.$$

Pour que cette équation subsiste quelle que soit l'orientation du axes, il faut et il suffit que l'on ait

$$(49) \qquad \begin{cases} p_1^2 + p_2 q_1 - \alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2 = 0 \\ p_1 p_2 + p_2 q_2 + \alpha_3 A_1 - \alpha_1 A_2 = 0 \\ A_3 = 0. \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des équations

$$\lambda_i(\xi_{j,k}) = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

équivant à l'ensemble des équations (44) et (49), lequel, on le vérifiera très aisément, équivant à l'ensemble des 9 premières des équations (23). Reste à prouver que l'ensemble des 9 autres équations du système (23) équivaut à l'ensemble des équatious

$$\lambda_i(\eta_{j,k}) = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

On pourrait évidemment y arriver au moyen d'un calcul tout à fait analogue à celui que nous venons d'effectuer, mais il est inutile de développer ce calcul car il est aisé de voir que l'on en obtiendra le résultat en remplaçant dans les 9 premières des équations (23) les symboles

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, \mu_1, \mu_2; \mu_3$$

respectivement par

$$\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, q_2, q_1, -q_3, p_2, p_1, -p_3, \mu_2, \mu_1, -\mu_3.$$

Sur les géométries de Cayley et sur une géométrie plane particulière.

Par

Stefan Glass (Wilno).

Introduction.

L'idée de Cayley de rattacher la métrique de Lobatschewski à une courbe invariable de second degré, a conduit F. Klein[1]) à une classification rationnelle des géométries planes de Cayley, c'est à dire des géométries dont les mouvements laissent invariable l'absolu — courbe de second degré, dégénérée ou non. Cette classification, qui est tout simplement la classification des formes que peut prendre l'absolu, permet de saisir immédiatement les rapports qui existent entre les différentes géométries. On remarque que la place occupée par la géométrie d'Euclide n'a rien de particulier. Cette clasification contient tous les types des géométries planes au sens de Riemann, s'il s'agit de petites portions du plan, car sur une telle portion a lieu approximativement une des géométries de Cayley.

J'exposerai dans ce qui suit:

1) la classification des géométries planes de Cayley;

2) la construction et la démonstration des théorèmes les plus importants de la plus simple des géométries, qui est la dégénérescence de toutes les autres, y compris celle d'Euclide. Je l'appelle la géométrie G. Elle a été mentionnée par M. E. Borel[2]) et M. H. Beck[3]) s'en est occupé.

---

[1]) F. Klein. „Nichteuklidische Geometrie". Goettingen 1893.

[2]) E. Borel. „Introduction géométrique à quelques théories physiques". Paris 1914, voir page 38.

[3]) Ce n'est qu'après avoir écrit le présent travail que j'ai eu connaissance du mémoire de M. H. Beck: „Zur Geometrie auf der Minimalebene". (Sitzungs-

Je termine par quelques remarques ayant trait à la physique et à la philosophie. Au commencement je passe en revue les notions fondamentales des géométries de Cayley en insistant sur le principe de dualité.

Introduction de la métrique sur le plan projectif tout entier.

Nous prendrons comme point de départ le plan projectif réel (plan de la géométrie euclidienne avec la droite à l'infini) que nous appellerons plan tout court et nous introduirons la métrique sur ce plan tout entier. Nous définissons les points x et les droites v à l'aide des coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3), (v_1, v_2, v_3). Les rapports entre les deux catégories des éléments du plan est le suivant: si $\sum_{i=1}^{3} x_i v_i = 0$, alors on dit que le point x est situé sur la droite v, ou que la droite v passe par le point x. Vu l'identité des définitions on peut transposer dans les théorèmes les mots: point, droite. Deux points d'une droite divisent les autres points de la droite en deux classes appelées segments. De même deux droites déterminent deux angles.

Considérons une conique non dégénérée. Nous la définirons dès le commencement d'une manière duale: comme lieu de ses points: $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0$, $(i, k = 1, 2, 3)$ et comme enveloppe de ses tangentes: $\sum_{i,k} A_{ik} v_i v_k = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Les coefficients a_{ik} sont réels, le déterminant $|a_{ik}| = \Delta \neq 0$, A_{ik} est le complément algébrique de a_{ik} divisé par Δ. Considérons les collinéations (transformations linéaires) laissant invariable cette conique, appelée absolu. On dit que ces collinéations appartiennent à l'absolu. Le dualisme dans les définitions de l'absolu est important, puisque la même courbe peut dégénérer de façons différentes, suivant qu'on la considère comme lieu de points ou comme enveloppe de droites (par conséquent les propriétes des segments peuvent devenir différentes des propriétés des angles, si l'on envisage une géométrie à l'absolu dégénéré).

Une collinéation appartenant à l'absolu s'appelle mouvement,

---

ber. d. Berl. Math. Ges. 12. pages 14—30). L'auteur y considère la géométrie sur un plan minimal de l'espace euclidien. Elle est identique à la géométrie G. Le mémoire de M. Beck traite donc un des sujets du travail présent. Cependant il y a des différences de méthode et de développements ulterieurs.

si l'on peut passer d'elle à la collinéation - identité par une série continue de collinéations appartenant à l'absolu.

La conique - absolu est réelle ou imaginaire, suivant qu'elle a ou non des points (droites) réels. Les coniques réelles d'une part et les coniques imaginaires de l'autre, ainsi que les groupes de mouvements qui leur appartiennent, sont toutes semblables entre elles par rapport au groupe des collinéations aux coefficients réels. On a donc deux sortes de géométries, définies par l'absolu non dégénéré: la géométrie de Riemann (géométrie R) à l'absolu imaginaire, et la géométrie de Lobatschewski-Poincaré (géométrie L-P) à l'absolu réel [1]).

On dit qu'un point réel en dehors de l'absolu est elliptique, hyperbolique ou parabolique, suivant que les deux droites passant par ce point et appartenant à l'absolu (tangentes à la conique absolu) sont imaginaires (conjuguées), réelles et différentes ou qu'elles se confondent (et sont nécessairement réelles). On définit d'une façon analogue les trois espèces de droites. Dans la géométrie R, on n'a que des éléments elliptiques; dans la géométrie L-P des éléments elliptiques et hyperboliques; les éléments paraboliques n'apparaissent que dans les géométries à l'absolu dégénéré.

Deux éléments de la même catégorie en dehors de l'absolu sont parallèles, si l'élément de l'autre catégorie qu'elles déterminent appartient à l'absolu.

Parmi les élements réels le parallélisme ne peut avoir lieu pour des éléments elliptiques.

Rappelons maintenant comment on introduit la métrique. Considérons une géométrie particulière définie par l'absolu $\varkappa$. Prenons deux éléments en dehors de l'absolu, de la même catégorie, de la même espèce, non parallèles, p. ex deux points A, A'. Ces points déterminent une droite a et sur elle deux segments. La droite coupe l'absolu en deux points différents B, B'. Suivant que B, B' sont réels ou imaginaires, a est hyperbolique ou elliptique. Considérons le premier cas. On entend par segment AA' le segment ne contenant pas

---

[1]) La géométrie esquissée par Poincaré dans son mémoire: „Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie" (Bulletin de la Soc. Math de France, 1888) c'est la géométrie à l'extérieur de la conique-absolu, la géométrie de Lobatschewski, c'est la géométrie à l'intérieur de cette conique Si l'on considère le plan projectif comme un tout, sur lequel l'absolu détermine la métrique, il faut regarder ces deux géométries comme parties d'une seule.

B, B' et par sa longueur $\overline{AA'}$ le produit de la valeur réelle du logarithme du birapport $(AA'BB')$ des points A, A', B, B' par une constante c, choisie une fois pour toutes, pour la géométrie que l'on considère. On procède d'une manière analogue dans le second cas, pour définir les longueurs des deux segments AA' de la droite elliptique. On choisit alors les valeurs de logarithme du birapport satisfaisant à la condition: la somme des modules des longueurs des deux segments AA' est égale à 2π multipliés par le module de c. Si ces longueurs sont égales, on dit que les points A, A' sont perpendiculaires. La longueur ainsi définie est un invariant par rapport aux mouvements et l'on a en outre pour trois points alignés:

$$\overline{AA''} = \overline{AA'} + \overline{A'A''}.$$

Pour obtenir par dégénérescence des valeurs réelles pour les longueurs dans la géométrie d'Euclide, nous prendrons c purement imaginaire dans la géométrie R (ce qui fait que les longueurs sont réelles) et c réel dans la géométrie L-P (donc les longueurs des droites hyperboliques sont réelles). Nous obtenons ainsi dans la géométrie L-P des valeurs purement imaginaires pour les longueurs des segments elliptiques (segments des droites elliptiques), mais le rapport des deux nombres de cette espèce étant réel, on peut bien comparer ces longueurs entre elles. Cependant on ne peut pas donner un sens à la comparaison des longueurs de deux segments dont l'un est elliptique et l'autre hyperbolique, mais il n'y a pas non plus de mouvement qui transporte l'un de ces segments sur l'autre. La longueur d'une droite elliptique est $2\pi ic$.

Nous définissons d'une manière analogue la grandeur des angles et nous introduisons une nouvelle constante c', analogue à c, que pour des raisons semblables nous choisissons purement imaginaire.

Il y a une infinité de géométries L-P et R et chacune d'elles est caractérisée par les paramètres $-\frac{1}{4c^2}, -\frac{1}{4c'^2}$ dont le premier s'appelle courbure.

Faisons maintenant dégénérer l'absolu considéré comme ensemble de points p. ex. en une droite (double) et considéré comme ensemble de droites en deux faisceaux aux centres imaginaires. Pour que les longueurs ne deviennent pas toujours égales à zéro, c doit tendre à l'infini, c' restant arbitraire. Donc il y a une

infinité de géométries euclidiennes. Quand enfin les centres des faisceaux mentionnés ci-dessus convergent vers un seul point (réel), alors c' doit aussi devenir infini pour que les angles ne deviennent pas tous nuls.

Je vais esquisser la métrique pour l'absolu dégénéré en prenant comme exemple la géométrie d'Euclide. Comme définition de la longueur nous prenons la limite de l'expression $c \,.\, \lg (AA' \, BB')$ mentionnée ci-dessus. La définition de l'angle ne change pas. Si l'on prenait comme mouvements les collinéations (formant un groupe G) qui laissent invariable l'absolu (avec la restriction de la page 21—22, relative aux mouvements), on verrait que la longueur n'est pas un invariant. Donc nous appellerons mouvements des collinéations (avec la même restriction) qui laissent invariable la longueur et l'angle. On peut obtenir ces mouvements comme dégénérescence de mouvements appartenant à un absolu qui dégénère. Elles forment un sous-groupe du groupe G. Les autres collinéations de G sont des similitudes.

Si l'on ne peut pas définir la mesure pour des „parties" (segments ou angles) des éléments d'une catégorie comme le produit d'une constante par le logarithme du birapport (p. ex. pour les segments de droites dans la géométrie d'Euclide), alors on dit que cette mesure est relative. Cela a lieu, si l'absolu, considéré comme lieu des éléments de l'autre catégorie, est doublement dégénéré (p. ex. la double droite ponctuée „à l'infini" dans la géométrie d'Euclide). Dans le cas contraire on dit que la mesure est absolue (p. ex. les angles dans la géométrie d'Euclide dont l'absolu, considéré comme formé de droites, se compose de deux faisceaux dont les centres sont les points „cycliques").

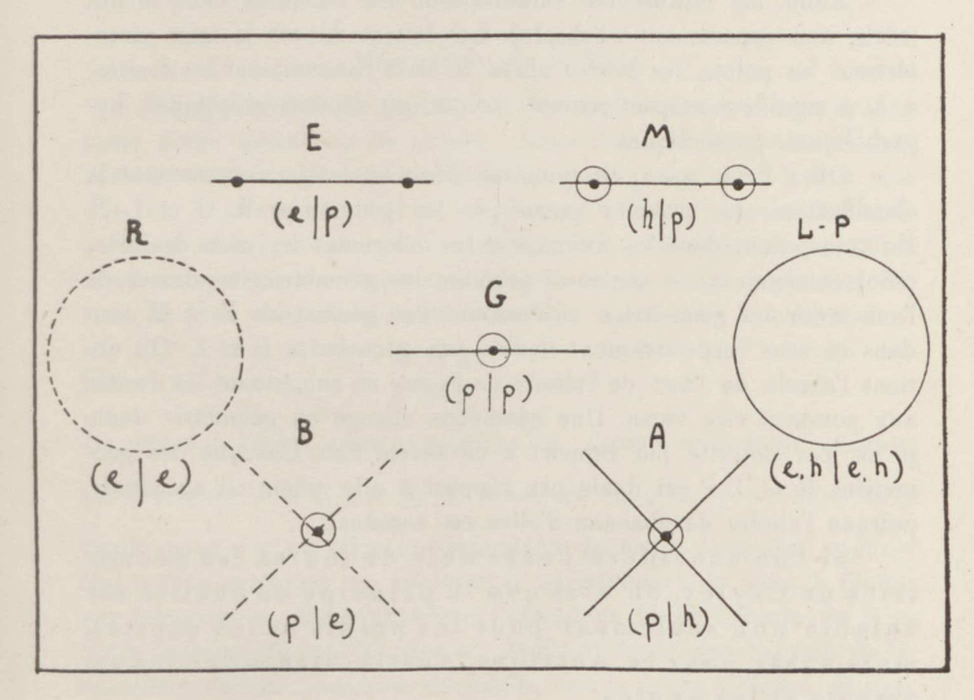
Considérons deux points d'une droite qui coupe l'absolu en deux points réels (différents ou se confondant entre eux). Si un de ces points reste fixe et l'autre tend vers un point de l'absolu, alors la longueur du segment tend vers l'infini. Cette remarque et une remarque analogue pour les angles conduisent à appeler infini, ce qui est réel dans l'absolu.

Classification des géométries.

Chaque géométrie est désignée par une majuscule et par un dessin symbolisant son absolu. R — Riemann, L-P — Lobatschewski-

Poincaré, E — Euclide, M — Minkowski [1]), B — Blaschke [2]), G — Galilée, A désigne une géométrie peu intéressante.

Voilà le sens des symboles: ◯ signifiie une conique non dégénérée, réelle, ◌ une conique non dégénérée imaginaire, ——— une droite réelle, ·········· une droite imaginaire, ⊙ un point réel, un point imaginaire. On voit p. ex. que l'absolu de la

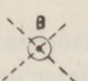


géométrie B, si on le considère comme ensemble de points, est formé par deux droites ponctuées imaginaires; si on le considère comme ensemble de droites, il est formé par un faisceau réel (double). Le dessin symbolique fait voir immédiatement les propriétés fondamen-

---

[1]) Minkowski. »Raum und Zeit". Leipzig 1909.

[2]) W. Blaschke. „Euklidische Kinematik u. nichteuklidische Geometrie". Zeitschrift f. Math. u. Physik. Bd. 60, page 61. M. Blaschke considère une géométrie à 3 dimensions. Sur les plans réels qui coupent l'absolu de cette géométrie suivant deux droites (imaginaires) a lieu la géométrie B.

tales de la géométrie considérée. Prenons p. ex.  Comme l'absolu — n'est pas complètement dégénéré dans le cas considéré (deux droites et non une droite double), on a la mesure absolue pour les segments Comme il est imaginaire, cette mesure est limitée — la droite a une longueur finie. Considérons cet absolu comme ensemble de droites. Comme il est réel (faisceau double, donc réel), on a des angles aussi grands que l'on veut. Comme la dégénération de l'absolu est complète, la mesure des angles est relative

Enfin les minuscules caractérisent les éléments dans le fini (réels, non appartenant à l'absolu). Les lettres devant le trait caractérisent les points, les lettres après le trait caractérisent les droites; *e*, *h*, *p* signifient respectivement: points (ou droites) elliptiques, hyperboliques, paraboliques

On a deux axes de symétrie dans le dessin représentant la classification. Le premier passe par les géométries R, G et L-P. En transposant dans les axiomes et les théorèmes les mots droite — point et segment — angle on permute les géométries au-dessus de l'axe avec les géométries au-dessous. Les géométries E et M sont dans ce sens respectivement duales aux géométries B et A. On obtient l'absolu de l'une de l'absolu de l'autre en substituant les droites aux points et vice versa. Une géométrie change en géométrie duale p. ex. par polarité par rapport à un cercle fixe. Chacune des géométries R, G, L-P est duale par rapport à elle même ou autoduale, puisque l'absolu de chacune d'elles est autodual.

Si l'on considère l'ensemble de toutes les géométries de Cayley, on voit que le principe de dualité est valable non seulement pour les points et les droites, mais aussi pour la métrique, c'est-à-dire pour les segments et les angles.

L'autre axe de symétrie, perpendiculaire au précédent, passe par la géométrie G. Ce qui est imaginaire dans l'absolu dans une géométrie à gauche de cet axe, est réel dans la géométrie à droité, symétrique à celle-ci.

En ne considérant que des élements dans le fini, on dira que deux points sont parallèles, s'il n'existe pas de droite passant par ces deux points. Alors on peut formuler le postulat des parallèles pour les points de la manière suivante:

Il existe sur une droite arbitraire qui ne passe pas par un point donné, un et un seul point parallèle au point donné.

On exprime d'une manière analogue l'axiome des parallèles pour les droites.

Les géométries situées le plus loin du centre. à l'absolu non dégénéré: R et L-P ne possèdent pas de postulat de parallèles. Chacune des géométries intermédiaires, à l'absolu non entièrement dégénéré, possède un postulat de parallèles: E et M pour les droites, B et A pour les points. La géométrie G en possède deux: pour les droites et pour les points.

Géométrie de Galilée.

La géométrie de Galilée est la dégénérescence complète de toute autre géométrie de Cayley. Nous l'obtiendrons comme dégénérescence de la géométrie d'Euclide. Pour passer de E à G il faut que les „points cycliques“ se confondent. Nous y parviendrons en „étirant“ infiniment le plan euclidien dans une direction fixe. Prenons un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires et étirons le plan dans la direction de l'axe des x par la collinéation:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= ax \\ y' &= y \end{aligned} \qquad a \to \infty$$

La droite à l'infini reste immobile, les „droites minimales“ passant par l'origine c. à d. $y = \pm ix$ changent en $y' = \pm \frac{i}{a} x$, donc à la limite pour $a = \infty$ elles se confondent, devenant l'axe des x; donc les points cycliques se confondent en devenant le point à l'infini sur l'axe des x. Nous obtenons l'absolu de G de l'absolu de E et notre système de coordonnées est choisi de façon que l'absolu de G, considéré comme ensemble de points, soit la droite à l'infini, et considéré comme ensemble de droites, soit le faisceau de droites parallèles à l'axe des x.

Ayant trouvé les dégénérescences des mouvements euclidiens et les dégénérescences des grandeurs euclidiennes suivantes: distance, angle et surface, nous vérifierons que les dégénérescences de ces grandeurs, ainsi que la droite à l'infini et le faisceau de parallèles à l'axe des x, sont des invariants pour les dégénérescences de mouvements. Ainsi nous aurons démontré l'existence de la géométrie G et les dégénérescences obtenues en seront les mouvements et les mesures.

Pour obtenir des rotations après l'étirement, il faut substituer dans les formules de rotation eclidienne d'angle $-\alpha$

$$X = x\cos\alpha + \sin\alpha$$
$$Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

les coordounées x', y' des formules (1). On obtient

(2)
$$X' = x'\cos\alpha + y'a\sin\alpha$$
$$Y' = -x'\frac{\sin\alpha}{a} + y'\cos\alpha$$

Faisons tendre α vers 0, tandis que a tend vers ∞ de façon que $a\sin\alpha$ tende vers une limite finię k. (2) donnent alors à la limite:

(3)
$$X = x + ky$$
$$Y = y$$

C'est la formule de rotation dégénérée.

Les formules de translation euclidienne:

$$X = x + \gamma$$
$$Y = y + \beta$$

donnent après l'étirement:

$$X' = x' + a\gamma$$
$$Y' = y' + \beta$$

Quand γ tend vers 0 de façon que $a\gamma$ tende vers une limite finie α, on obtient à la limite:

(4)
$$X' = x + \alpha$$
$$Y' = y + \beta$$

La formule de translation reste donc la même. La formule de la distance de deux points (x_1, y_1), $(x_2, 4_2)$ est $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Elle donne après l'étirement $\sqrt{\left(\frac{x_1' - x_2'}{a}\right)^2 + (y_1' - y_2')^2}$ et à la limite:

(5)
$$\delta = y_1 - y_2$$

Telle est la dégénérescence de la distance. L'angle entre l'axe des y et la droite $y = mx$ est $\operatorname{arctg}\frac{1}{m} = \operatorname{artg}\frac{x}{y}$. Après l'étirement nous en obtenons $\operatorname{arctg}\frac{x'}{ay'} = \operatorname{arçtg}\frac{1}{am'}$. En multipliant par a nous obtenos

à la limite $\lim\limits_{a=\infty} a \operatorname{arctg} \frac{1}{am} = \frac{1}{m} = \frac{x}{y}$. C'est la dégénérescence de l'angle entre l'axe des y et la droite au coefficient angulaire m. Donc la dégénérescence de l'angle entre deux droites aux coefficients angulaires m, m' sera:

$$\Delta = \frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \tag{6}$$

Nous trouvons d'une manière analogue l'expression pour la dégénérescence P de la surface du parallélogramme aux sommets $(x_1\, y_1)$, (x_2, y_1), $(x_2\, y_2)$, (x_1, y_2).

$$P = (x_1 - x_2)\ (y_1 - y_2) \tag{7}$$

On vérifie avec la plus grande facilité que les dégénérescences définies par les formules (5), (6), (7) sont des invariants pour les transformations (3) et (4) et qu'elles possèdent la propriété additive. On voit immédiatement que la droite à l'infini et le faisceau de droites parallèles à l'axe des x sont changés en eux-mêmes par les transformations (3) et (4). Donc l'existence de la géométrie G est démontrée. La direction de l'axe des y n'est pas invariable pour la transformation (3). Dans un système d'axes oblique, où l'axe des x appartient au faisceau de droites-absolu et l'axe des y a une direction arbitraire, (3) et (4) représentent des mouvements de la géométrie G, (5), (6), (7) sont les expressions de la distance de l'angle et de la surface.

Il est facile de voir que le mouvement le plus général, laissant invariable la distance (5) et l'angle (6) est une combinaison des mouvements (3) et (4). En effet, comme la droite à l'infini doit changer en elle même, on n'a qu'à considérer des collinéations entières. La longueur doit rester invariable, donc

$$Y_1 - Y_2 = y_1 - y_2 \tag{8}$$

Soit $Y = ax + by + c$ la transformation de l'y. En substituant cette expression dans (8) on obtient $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = y_1 - y_2$, d'où $a = 0$, $b = 1$. Donc, dans un mouvement, la transformation de Y est $Y = y + c$.

Les droites $X = Ay + B$, $X = A_1 y + B_1$ forment l'angle $A - A_1$. Appliquons le mouvement $x = aX + bY + c$, $y = Y + d$; les droites deviennent:

$$aX + bY + c = AY + \dots \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{A-b}{a} Y + \dots$$
$$aX + bY + c = A_1 Y + \dots \qquad\qquad X = \frac{A_1 - b}{a} Y + \dots$$

vu l'invariabilité de l'angle on doit avoir $\frac{A-b}{a} - \frac{A_1 - b}{a} = A - A_1$ d'où $a = 1$. Donc le mouvement le plus général de G est

$$(9) \qquad \begin{aligned} X &= x + ky + \alpha \\ Y &= y + \beta \end{aligned}$$

On l'obtient en exécutant la rotation (3) suivie de la translation (4). Chacune des paraboles appartenant au faisceau à l'axe parallèle au faisceau de droites absolues

$$(10) \qquad x = \frac{k}{2\beta} y^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{k}{2}\right) y + c \qquad (c \text{ arbitraire})$$

est changée en elle-même par le mouvement (9). Ces paraboles jouent ici le rôle des cercles.

Un faisceau de droites a ici la métrique identique à la métrique sur une droite: les distances et les angles peuvent être arbitrairement grands, chaque droite contient un point inaccessible dans lequel un autre point de la droite ne peut être transporté par un mouvement; dans chaque faisceau existe une droite inaccessible (dans notre système de coordonnées — une droite parallèle à l'axe des x).

Si l'on prend un point accessible et une droite accessible ne le contenant pas, allors il existe sur cette droite un seul point accessible tel qu'avec le point donné il ne détermine aucune droite accessible (dans notre système de coordonnées c'est le point où la parallèle à l'axe des x passant par le point donné coupe la droite donnée). Deux points (droites) accessibles ne déterminant aucune droite (aucun point) accessible, sont dits parallèles.

Comme les mouvements s'expriment par des formules linéaires, entières en x, y, on a pour les droites l'axiome de parallèles. On a pareillement un axiome de parallèles pour les points.

La rotation (3) laisse immobile tout point de l'axe des x, chaque point d'une droite inaccessible est transporté en un point parallèle, et la grandeur de cette translation est proportionnelle à la distance de ce point de l'axe des x.

Une rotation euclidienne autour de l'origine (0, 0) laisse inva-

riable le cercle au centre (0, 0). Après la transformation (2) on a à la place du cercle l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = r^2$ qui, à la limite, se divise en deux droites $y = \pm r$; ce couple de droites peut donc être regardé comme „cercle" pour la rotation (3). Son centre est situé en un point arbitraire de l'axe des x. Ce „cercle" est le lieu de points équidistants d'un point arbitraire de l'axe des x. C'est une dégénérescence du cercle général (10).

Comment caractériser un couple de droites parallèles indépendamment du système de coordonnées? S'il s'agit de droites inaccessibles, il suffit de prendre la distance de deux points arbitraires

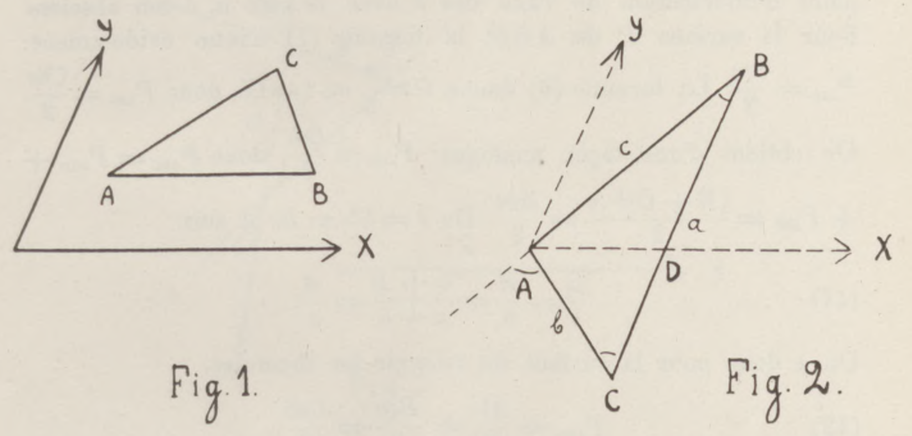


Fig. 1. Fig. 2.

situés sur deux droites différentes. S'il s'agit de droites accessibles a, a', on prend deux points parallèles A, A', situés l'un sur a, l'autre sur a', on conduit par ces points deux droites, se coupant au point B sous un angle égal à l'unité. La longueur $AB = A'B$ ne change pas, si on transporte le couple de droites, donc elle le caractérise.

On caractérise d'une façon analogue les points parallèles. Vu la dégénération complète de l'absolu, la notion de perpendicularité n'existe ni pour les points ni pour les droites.

En définissant la longueur d'une courbe comme limite d'une ligne brisée inscrite, on voit que d'après (5) la longueur de la courbe sans points parallèles est égale à la longueur du segment de droite qui joint les points extrêmes de la courbe (ceci rappelle la notion du temps newtonien).

Un triangle peut être impropre ou propre selon q'il a ou non deux sommets parallèles. Dans un triangle impropre (fig. 1), le côté

joignant les sommets parallèles A, B a la longueur 0, les angles en $A\,B$ sont infinis, les autres côtés sont égaux.

Un triangle propre, ou triangle tout court, a un angle (p. ex. en A, fig. 2) infiniment grand. Nous appellerons angle du triangle l'angle fini qui est adjacent au précédent. Le côté le plus grand (respectivement l'angle le plus grand) d'un triangle est égal à la somme des deux autres. Cherchons à exprimer la surface du triangle indépendamment des coordonnées. Désignons ses angles par A, B, C, ses côtés par a, b, c. Soit A le plus grand des angles. Alors $A=B+C$, $a=b+c$. Prenons la droite inaccessible passant par A comme l'axe des x, la parallèle par A au côté a comme l'axe des y. Soit D le point d'intersection de l'axe des x avec le côté a, t son abscisse. Pour la surface P de ABD, la formule (7) donne évidemment: $P_{ABD}=\frac{t\,.\,c}{2}$. La formule (6) donne $C=\frac{t}{b}$ ou $t=Cb$, donc $P_{ABD}=\frac{Cbc}{2}$. On obtient d'une façon analogue: $P_{ACD}=\frac{Bcb}{2}$, donc $P_{ABC}=P_{ABD}+$ $+P_{ACD}=\frac{(B+C)b\,.\,c}{2}=\frac{Abc}{2}$. De $t=Cb=Bc$ il suit:

$$\frac{C}{c}=\frac{B}{b}=\frac{C+B}{c+b}=\frac{A}{a}. \tag{11}$$

On a donc pour la surface du triangle les formules:

$$P_{ABC}=\frac{Abc}{2}=\frac{Bca}{2}=\frac{Cab}{2}. \tag{12}$$

La surface du triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés par l'angle fini qu'ils contiennent.

Dans les formules des géométries non dégénérées exprimant les rapports entre angles et côtés du triangle, les côtés et les angles sont des arguments de fonctions transcendantes. Dans une géométrie semi-dégénérée (comme p. ex. E) une catégorie des élements (les côtés dans E) sort pour ainsi dire de la fonction transcendante. Dans la géométrie G, complètement dégénérée, toutes les formules sont élémentaires: il n'y a que des opérations arithmétiques. On peut dire que, ainsi que E est la géométrie dans le voisinage d'un point de R, G est la géométrie dans le voisinage d'une droite de E ou géométrie dans une bande euclidienne infiniment mince. La trigonométrie de E donne les formules de G, en remplaçant $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ par x et $\cos x$ par 1. P. ex. (11) est la dégénérescence du théoreme

des sinus, (12) donne la surface d'un triangle euclidien dont deux angles sont infiniment petits etc.

Disons quelques mots sur les similitudes en G. La transformation $x' = ax$, $y' = ay$ ne change pas les angles, les côtés sont changés en segments proportionnels. La transformation $x' = bx$, $y' = y$ produit un effet contraire: les côtés ne changent pas, les angles sont changés en angles proportionnels. La similitude générale

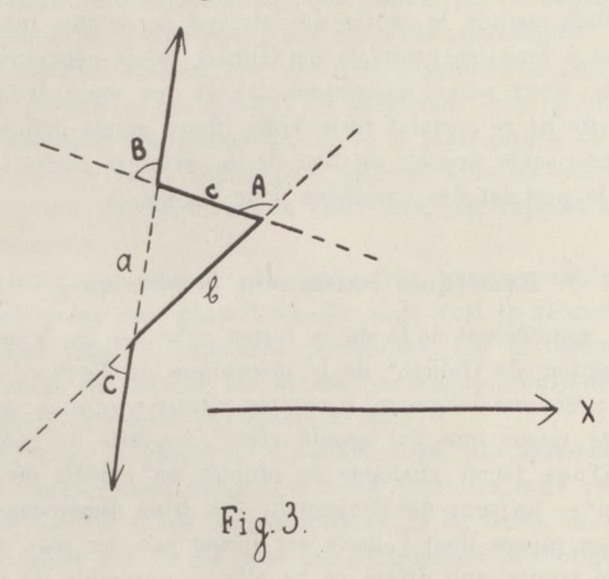


Fig. 3.

change un triangle aux éléments A, b, c, en un triangle aux éléments nA, mb, mc. Ces deux triangles ont pour les côtés le coefficient de proportionnalité m, pour les angles le coefficient n.

Il n'y a dualité ni dans la forme du triangle ni dans la formule exprimant sa surface. Il faut compléter le triangle par une figure duale qui existe dans la géométrie B, duale par rapport à E.

Ce „triangle dual" (fig. 3, dessiné à plein trait), a trois angles finis A, B, C, deux côtés finis et un côté infini. Convenons de prendre comme longueur de ce dernier la longueur du segment complémentaire. La surface du triangle pouvant être considérée comme mesure de l'ensemble des points à l'intérieur du triangle, la „surface duale" $\frac{ABc}{2}$ peut être considérée comme mesure de l'ensemble des droites qui coupent deux côtés d'un triangle dual. La surface duale a la propriété additive.

Trois points (ou droites) définissent un triangle ordinaire et un triangle dual. Le rapport de la surface duale à la surface du triangle $\frac{ABc}{abC} = \frac{A}{a}$ est égal au paramètre de la parabole à l'axe inaccessible (cercle de la géométrie G) qui passe par ces trois points. On a cinq espèces de courbes du second degré: l'ellipse, et deux espèces d'hyperboles et de paraboles, un point à l'infini sur la courbe pouvant être ou non le centre du faisceau de droites inaccessibles. G satisfait à tous les postulats de Hilbert de la géométrie E, sauf le premier: deux points définissent une et une seule droite. La seconde partie de ce postulat reste vraie (deux points définissent tout au plus une seule droite); au lieu de la première partie il faut introduire le postulat des parallèles pour les points.

Remarques concernant la physique.

Un mouvement de G de la forme $x' = x + ky$, $y' = y$ est „la transformation de Galilée" de la mécanique de Newton, si l'on interprète x comme longueur, k comme vitesse, y comme temps. C'est pour cette raison que j'ai appelé cette géométrie, la géométrie de Galilée. D'une façon analogue on obtient un modèle de l'„univers newtonien" — au sens de Minkowski — à trois dimensions, en considérant un espace dont l'absolu est formé par: un plan réel — ensemble de points, une droite de ce plan — ensemble de plans contenant cette droite, deux points imaginaires de cette droite — faisceaux de droites. Enfin le modèle de l'univers newtonien à quatre dimensions a pour absolu: un espace réel — ensemble de points, un plan réel de cet espace — ensemble d'espaces à trois dimensions, une conique imaginaire non dégénérée située sur le plan — ensemble de plans et de droites. En général l'absolu d'un espace riemannien à $n-1$ dimensions appartient à l'absolu de l'espace euclidien à n dimensions et ce dernier est contenu dans l'absolu de l'univers newtonien à $n+1$ dimensions. „Le moment présent" dans l'univers à quatre dimensions — l'espace existant à un certain moment — est un espace réel à trois dimensions contenant le plan réel-absolu. On peut construire dans cet espace trois axes de coordonnées de l'espace. L'axe du temps est une droite qui n'a qu'un point de commun avec cet espace à trois dimensions. Ainsi la notion du „même moment du temps pour deux points différents de l'espace", critiquée

par les einsteiniens du point de vue de leur théorie de la connaissance, trouve une expression adéquate dans une géométrie à laquelle conduit la géométrie G, donc dans une géométrie qui, du point de vue de la logique, existe tout aussi bien qu'une autre.

Remarques philosophiques.

La classification rationnelle des géométries de Cayley fait voir que la géométrie E n'occupe point de place „privilégiée“ parmi les autres géométries: elle est une des quatre géométries „semi-dégénérées“ qui possèdent un postulat de parallèles. Sont distinguées de manière essentielle: la géométrie G — la plus simple de toutes et la géométrie R — sans l'infini, pour laquelle tous les éléments réels d'une catégorie sont équivalents entre eux, par rapport au groupe des mouvements.

Il paraît que malgré cela, pour tout homme sans parti pris, ce ne sont point ces géométries-là, mais c'est la géométrie d'Euclide — qui joue un rôle tout particulier. On la ressent comme quelque chose de naturel, les autres paraissent „contradictoires en elles-mêmes“. Comment expliquer ce fait?

Pour nous la géométrie d'Euclide n'est pas seulement un système de conséquences tirées de certains postulats, mais elle exprime ce qui correspond à nos représentations de la droite, du point, des segments égaux etc. Je ne pose pas la question de l'origine de ces représentations, je ne demande pas si elles sont innées ou acquises par l'expérience. Ce qui m'importe c'est de constater d'une manière certaine leur existence:

I. Précisément la sensation du „contradictoire“ chez un homme qui rencontre pour la première fois un théorème non-euclidien provient de ce qu'en entendant les paroles: droite, point etc. il les rapporte aux représentations euclidiennes et le théorème lui présente des rapports en contradiction avec ces représentations.

II. Il est vrai qu'on dit que: „du plan euclidien on passe au plan projectif en introduisant le groupe de toutes les collinéations, et qu'en y choisissant un sous-groupe différent du groupe des mouvements euclidiens, on obtient une nouvelle géométrie“, — mais notre imagination est incapable de suivre ce procès. Les mouvements non-euclidiens sont pour nous des déformations des longueurs et des angles, puisque toujours, d'une manière plus ou moins con-

sciente, nous nous imaginons ces mouvements sur un „fond euclidien“. Chaque „réalisation imaginable“ des géométries non-euclidiennes, comme celles de Beltrami, de Poincaré etc.. est une réalisation à l'aide de la géométrie euclidienne.

III. Celui qui prétend pouvoir se représenter la géométrie non-euclidienne aussi bien que la géométrie euclidienne devrait essayer de s'imaginer que la somme des longueurs des côtés d'un triangle est une constante (géométrie B) ou que l'angle peut être arbitrairement grand (géométries G, B, M)! Le fait, en apparence étrange, que les géométries telles que A ou G, du point de vue formel plus simples que L-P ou R, sont restées inaperçues si longtemps, s'explique par la remarque qu'elles sont plus éloignées de nos représentations.

Nous arrivons à la conclusion que le mot géométrie comporte au moins une double signification: 1) description de rapports correspondants à notre imagination, 2) système de conséquences tirées de postulats d'un certain caractère [1]). Dans le premier sens du mot il existe une seule géométrie — la géométrie euclidienne; la place „subalterne“ qu'elle occupe parmi les autres géométries formelles, fait voir que l'importance toute particulière qu'elle a pour nous est fondée sur des bases qui n'appartiennent pas au domaine des Mathématiques pures.

---

[1]) Je ne touche pas ici au problême des rapports entre la géométrie et la physique, c.-à-d. à la question de la structure qui convient au monde qu'explore le physicien.

Complément à la note de M. H. Hildebrandt[1]).

Par

M. Paul Flamant.

Aux remarques précédentes de M. T. H. Hildebrandt, on peut ajouter les suivantes qui ont pour but d'abaisser encore d'une unité le nombre des postulats concernant les champs de vecteurs abstraits[2]).

L'énoncé 5 peut être décomposé en deux affirmations:

5' : ξ étant un élément du champ σ, il existe dans ce champ un élément o_ξ tel que $\xi + o_\xi = \xi$;

5'' : cet élément o_ξ est indépendant du vecteur ξ.

L'énoncé 5' résulte des postulats 6, 10 et 11; ces derniers montrent qu'on peut prendre $o_\xi = 0 . \xi$; car

$$\xi + 0 . \xi = 1 . \xi + 0 . \xi = (1 + 0) . \xi = 1 . \xi = \xi.$$

En outre, le n° 15 fait connaître une propriété commune à tous les vecteurs o_ξ ainsi introduits: $\|o_\xi\| = 0$.

Il suffit alors de modifier très légèrement la rédaction du n° 14 pour que 5'' en soit la conséquence. On l'énoncera:

14 modifié: Il n'existe dans le champ σ qu'un seul vecteur ayant une longueur nulle (on peut noter ce vecteur o).

En résumé, en supprimant de la liste des postulats les n°s 4, 5, 7 et 8 et en modifiant comme je l'indique le n° 14, on obtient un système d'axiomes d'où l'on peut déduire d'abord les n°s 5 et 14 (ancienne forme), puis alors, avec M. Hildebrandt, les n°s 4, 7 et 8.

---

[1]) Extrait d'une lettre adressée par le Professeur H. Hildebrandt (Université d'Ann Arbor) à M. Maurice Fréchet (Université de Strasbourg), p. 1 du présent volume.

[2]) Maurice Fréchet. Sur une définition géométrique des espaces abstraits affines, Annales de la Société polonaise de Math., t IV, 1925, p. 3.

Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.

Par

M. Janet, (Prof. à l'Univ. de Caen).

1. — Etant donné une forme quadratique de différentielles

$$\Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k$$

(où les a sont des fonctions données quelconques des n variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots u_n$) peut-on trouver des fonctions $x, y, \ldots z$ de ces n variables telles que l'on ait identiquement

$$\Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k = dx^2 + dy^2 + \ldots + dz^2;$$

autrement dit le système d'équations aux dérivées partielles

$$\text{(A)} \qquad S \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k} = a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

(où le signe S signifie comme d'habitude que l'on remplace successivement x par $y, \ldots$ ou z et que l'on fait la somme des termes obtenus) a-t-il quelque solution?

Même dans le cas où le nombre des fonctions inconnues x, $y, \ldots z$ n'est pas inférieur au nombre des équations, rien n'autorise a priori à affirmer que le système considéré est bien compatible. Une démonstration rigourense de ce fait est nécessaire. Nous nous proposons de tenter une telle démonstration dans le cas où le nombre des fonctions inconnues $x, y, \ldots z$, est égal au nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ des équations.

Nous poserons, pour abréger,

$$S \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k} = (i, k)$$

et plus généralement

$$S\,\frac{\partial^p x}{\partial u_i\,\partial u_k\,\partial u_l\ldots}\cdot\frac{\partial^{p'} x}{\partial u_{i'}\,\partial u_{k'}\,\partial u_{l'}\ldots}=(i\,k\,l\ldots,i'\,k'\,l'\ldots).$$

On a $(i\,k\,l\ldots,\,i'\,k'\,l'\ldots)=(i'\,k'\,l'\ldots,\,i\,k\,l\ldots)$.
Nous poserons aussi

$$E_{ik}\equiv(i,k)-a_{ik}.$$

2. — Cas élémentaire: $n=2$. Soit à étudier le système des 3 équations:

(1) $$E_{11}\equiv(1,1)-a_{11}=0$$
(2) $$E_{12}\equiv(1,2)-a_{12}=0$$
(3) $$E_{22}\equiv(2,2)-a_{22}=0.$$

Ce système, dérivé une fois, donne un certain nombre d'équations du 2e ordre, dont nous tirons les combinaisons[1]) suivantes:

(4) $$2(E_{12})_1-(E_{11})_2\equiv 2(11,2)-[2(a_{12})_1-(a_{11})_2]=0$$
(5) $$(E_{12})_2\equiv(1,22)+(12,2)-(a_{12})_2$$
(6) $$(E_{22})_2\equiv 2(2,22)-(a_{22})_2.$$

Le système proposé, dérivé deux fois, donne un certain nombre d'équations du 3e ordre, dont nous tirons la combinaison suivante, qui n'est que du 2e ordre:

(7) $$-(E_{11})_{22}+2(E_{12})_{12}-(E_{22})_{11}\equiv 2[(11,22)-(12,12)]-\\ -(-(a_{11})_{22}+2(a_{12})_{12}-(a_{22})_{11}).$$

Choisissons arbitrairement trois fonctions x, y, z de u_1, satisfaisant à l'équation (1) où l'on fait $u_2=u_2^0$ et résolvons le système (2), (3), (4), où l'on fait $u_2=u_2^0$, x_2, y_2, z_2 étant les trois inconnues; supposons que pour la solution considérée le déterminant fonctionnel

$$\|\,x_1\quad x_2\quad x_{11}\,\|$$

soit différent de zéro.

Le système (5), (6), (7) est un système normal du 2e ordre, résoluble par rapport à x_{22}, y_{22}, z_{22}. Considérons la solution de ce

---

[1]) Nous désignons pour abréger $\dfrac{\partial E_{12}}{\partial u_1}$ par $(E_{12})_1$, $\dfrac{\partial E_{11}}{\partial u_2}$ par $(E_{11})_2$, ... etc..

système telleque x, y, z; x_2 y_2 z_2 prennent pour $u_2 = u_2^0$ les valeurs que nous venons d'indiquer.

Je dis que le système de fonctions qui constituent cette solution satisfait au système d'équations proposées (1), (2), (3).

Puisque, quelsque soient u_1, u_2 on a $(E_{22})_2 = 0$ (6) et que, d'autre part, pour $u_2 = u_2^0$, $E_{22} = 0$ (3), on a quelsque soient u_1 u_2

$$E_{22} = 0.$$

De même les équations (5) et (2) montrent que quels que soient u_1 u_2, on a

$$E_{12} = 0.$$

D'après ces resultats on a

quels que soient u_1, u_2:	$(E_{11})_{22} = 0$	(7)
et pour $u_2 = u_2^0$	$(E_{11})_2 = 0$	(4)
	$E_{11} = 0.$	(1)

Il en résulte que quels que soient u_1, u_2, on a

$$E_{11} = 0.$$

3. — Passage du cas de $n-1$ variables au cas de n variables.

Admettons qu'on sache démontrer la compatibilité d'un système telque (A) dans le cas de $n-1$ variables et cherchons à la démontrer dans le cas de n variables.

Le système considéré s'écrit:

(1) $E_{i'k'} \equiv (i', k') - a_{i'k'} = 0 \qquad i', k' = 1, 2, \ldots n-1$

(2) $E_{i'n} \equiv (i', n) - a_{i'n} = 0$

(3) $E_{nn} \equiv (n, n) - a_{nn} = 0.$

Ce système, dérivé une fois, donne un certain nombre d'équations du 2ᵉ ordre dont nous tirons les combinaisons suivantes:

(4) $(E_{i'n})_{k'} + (E_{k'n})_{i'} - (E_{i'k'})_n \equiv 2(i'k', n) - [(a_{i'n})_{k'} + (a_{k'n})_{i'} - (a_{i'k'})_n] = 0$

(5) $(E_{i'n})_n \equiv (i'n, n) + (i', nn) - (a_{i'n})_n = 0$

(6) $(E_{nn})_n \equiv 2(n, nn) - (a_{nn})_n = 0.$

Le système (1), (2), (3) dérivé deux fois, donne un certain nombre d'équations du 3ᵉ ordre, dont nous tirons les combinaisons suivantes, qui ne sont que du 2ᵉ ordre:

$$(7)\quad \left|\begin{array}{l} -(E_{i'k'})_{nn}+(E_{i'n})_{k'n}+(E_{k'n})_{i'n}-(E_{nn})_{i'k'} \\ =2[(i'k',nn)-(k'n,i'n)]-[-(a_{i'k'})_{nn}+(a_{i'n})_{k'n}+ \\ +(a_{k'n})_{i'n}-(a_{nn})_{i'k'}]=0. \end{array}\right.$$

Choisissons arbitrairement $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions de $u_1\, u_2 \ldots u_{n-1}$, $(x, y, \ldots z)$ satisfaisant au système (1) où l'on fait $u_n = u_n^0$.

Résolvons le système (2), (3), (4), où l'on fait $u_n = u_n^0$, $\frac{\partial x}{\partial u_n}, \frac{\partial y}{\partial u_n}, \ldots \frac{\partial z}{\partial u_n}$ étant les $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Supposons que pour la solution considérée le déterminant fonctionnel

$$\left\| \cdot\cdot \frac{\partial x}{\partial u_{i'}} \cdot\cdot \frac{\partial x}{\partial u_n} \cdot\cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_{i'} \partial u_{k'}} \cdots \right\|$$

soit différent de zéro.

Le système (5), (6), (7) est un système normal du 2[e] ordre résoluble par rapport à $x_{nn}, y_{nn}, \ldots z_{nn}$. Considérons la solution de ce système telle que $x, y, \ldots z$; $x_n, y_n, \ldots z_n$ prennent pour $u_n = u_n^0$ les valeurs que nous venons d'indiquer.

Je dis que le système de fonctions qui constituent cette solution satisfait au système d'équations proposées (1) (2) (3).

Puisque, quels que soient $u_1, u_2, \ldots u_n$, on a

$$(6)\qquad (E_{nn})_n = 0$$

et que d'autre part, pour $u_n = u_n^0$,

$$(3)\qquad E_{nn} = 0$$

on a quels que soient $u_1, u_2 \ldots u_n$

$$E_{nn} = 0.$$

De même les équations (5) et (2) montrent que l'on a quels que soient $u_1, u_2 \ldots u_n$:

$$E_{i'n} = 0.$$

D'après ces résultats on a

quels soient $u_1, u_2 \ldots u_n$	$(E_{i'k'})_{nn} = 0$	(7)
et pour $u_n = u_n^0$	$(E_{i'k'})_n = 0$	(4)
	$(E_{i'k'}) = 0$	(1)

Il en résulte que quels que soient $u_1, u_2 \ldots u_n$, on a

$$E_{i'k'} = 0.$$

4. — Restrictions à la validité de la démonstration générale.

Le système (1) où l'on fait $u_n = u_n^0$ contient $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions inconnues et $\frac{n(n-1)}{2}$ équations; si l'on y choisit d'abord arbitrairement n des inconnues (fonctions de $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$) il est bien de la forme (A) que nous étudions. Mais nous avons admis, pour passer au cas de n fonctions inconnues, non seulement que ce système est compatible, mais qu'il a quelque solution telle que le système Σ d'équations algébriques (2) (3) (4) en $\frac{\partial x}{\partial u_n}, \frac{\partial y}{\partial u_n}, \ldots \frac{\partial z}{\partial u_n}$ qui en résulte soit résoluble dans les conditions classiques de la théorie des fonctions implicites, c'est à dire de manière que, pour une au moins des solutions de Σ, le déterminant Δ d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$ dont une ligne est

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x}{\partial u_n} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} \cdots \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_{n-1}} \cdots \frac{\partial^2 x}{\partial u_{n-1} \partial u_{n-1}}$$

et dont les autres lignes s'en déduisent en changeant x en $y, \ldots$ en z, n'est pas identiquement nul.

Il resterait donc à traiter le cas où le système algébrique obtenu en adjoignant à (1): 1° les équations du 2e ordre que l'on peut en tirer par dérivations relativement à $u_1\ u_2 \ldots u_{n-1}$ et 2° les équations (2), (3), (4), entraînerait justement l'identité en $u_1\ u_2 \ldots u_n$

$$\Delta \equiv 0.$$

On est amené là à une question d'algébre pure que nous n'avons pas élucidé pour n quelconque, et que nous traiterons ici pour $n = 2$.

5. — Utilisons dans ce cas les nouvelles notations: u pour u_1 v pour u_2. Le cas exceptionnel est celui où le système algébrique en $x_u\ y_u\ z_u, x_{u^2}, y_{u^2}, z_{u^2}, x_v, y_v, z_v$

$$S x_u^2 = a_{11}$$
$$S x_u x_{u^2} = \tfrac{1}{2}(a_{11})_u$$
$$S x_u x_v = a_{12}$$
$$S x_{u^2} x_v = (a_{12})_u - \tfrac{1}{2}(a_{11})_v$$
$$S x_v^2 = a_{22}$$

entraîne l'identité en u, v

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{u^2} \\ y_u & y_v & y_{u^2} \\ z_u & z_v & z_{u^2} \end{vmatrix} = 0$$

Un calcul assez simple permet de prouver que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe une fonction $f(u, v)$ telle que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = a_{11} \qquad \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} = a_{12} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = a_{22}.$$

Mais alors la compatibilité du système (A) en x, y, z est évidente. Ou peut même dire que sa solution est „plus indéterminée" que dans le cas général; elle dépend ici d'une fonction arbitraire de deux variables (et non plus seulement de deux fonctions d'une variable): l'une des trois fonctions x, y, z peut être prise arbitrairement.

6. — En résumé nous avons montré comment, sachant traiter le problème proposé pour $n-1$ variables dans le cas le plus général, on peut passer au même problème pour n variables dans le cas le plus général également.

Nous avons montré comment s'introduisent les cas exceptionnels. Il resterait à traiter tous ces cas exceptionnels comme nous avons traité, à titre d'indication, celui que l'on rencontre pour $n = 2$.

Cracovie, juin 1926.

Il en résulte que quels que soient u_1, $u_2 \ldots u_n$, on a

$$E_{i'k'} = 0.$$

4. — Restrictions à la validité de la démonstration générale.

Le système (1) où l'on fait $u_n = u_n^0$ contient $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions inconnues et $\frac{n(n-1)}{2}$ équations; si l'on y choisit d'abord arbitrairement n des inconnues (fonctions de u_1, $u_2 \ldots u_{n-1}$) il est bien de la forme (A) que nous étudions. Mais nous avons admis, pour passer au cas de n fonctions inconnues, non seulement que ce système est compatible, mais qu'il a quelque solution telle que le système Σ d'équations algébriques (2) (3) (4) en $\frac{\partial x}{\partial u_n}, \frac{\partial y}{\partial u_n}, \ldots \frac{\partial z}{\partial u_n}$ qui en résulte soit résoluble dans les conditions classiques de la théorie des fonctions implicites, c'est à dire de manière que, pour une au moins des solutions de Σ, le déterminant Δ d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$ dont une ligne est

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x}{\partial u_n} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} \cdots \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_{n-1}} \cdots \frac{\partial^2 x}{\partial u_{n-1} \partial u_{n-1}}$$

et dont les autres lignes s'en déduisent en changeant x en $y, \ldots$ en z, n'est pas identiquement nul.

Il resterait donc à traiter le cas où le système algébrique obtenu en adjoignant à (1): 1° les équations du 2e ordre que l'on peut en tirer par dérivations relativement à u_1 $u_2 \ldots u_{n-1}$ et 2° les équations (2), (3), (4), entraînerait justement l'identité en u_1 $u_2 \ldots u_n$

$$\Delta \equiv 0.$$

On est amené là à une question d'algébre pure que nous n'avons pas élucidé pour n quelconque, et que nous traiterons ici pour $n = 2$.

5. — Utilisons dans ce cas les nouvelles notations: u pour u_1 v pour u_2. Le cas exceptionnel est celui où le système algébrique en x_u y_u z_u, x_{u^2}, y_{u^2}, z_{u^2}, x_v, y_v, z_v

$$S x_u^2 = a_{11}$$
$$S x_u x_{u^2} = \tfrac{1}{2}(a_{11})_u$$
$$S x_u x_v = a_{12}$$
$$S x_{u^2} x_v = (a_{12})_u - \tfrac{1}{2}(a_{11})_v$$
$$S x_v^2 = a_{22}$$

entraîne l'identité en u, v

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{u^2} \\ y_u & y_v & y_{u^2} \\ z_u & z_v & z_{u^2} \end{vmatrix} = 0$$

Un calcul assez simple permet de prouver que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe une fonction $f(u, v)$ telle que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = a_{11} \qquad \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} = a_{12} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = a_{22}.$$

Mais alors la compatibilité du système (A) en x, y, z est évidente. Ou peut même dire que sa solution est „plus indéterminée" que dans le cas général; elle dépend ici d'une fonction arbitraire de deux variables (et non plus seulement de deux fonctions d'une variable): l'une des trois fonctions x, y, z peut être prise arbitrairement.

6. — En résumé nous avons montré comment, sachant traiter le problème proposé pour $n-1$ variables dans le cas le plus général, on peut passer au même problème pour n variables dans le cas le plus général également.

Nous avons montré comment s'introduisent les cas exceptionnels. Il resterait à traiter tous ces cas exceptionnels comme nous avons traité, à titre d'indication, celui que l'on rencontre pour $n = 2$.

Cracovie, juin 1926.

Applications des paramètres locaux.

Par

V. Hlavatý (Prague).

Dans ce Mémoire j'ai eu pour but d'étudier les applications des „paramètres locaux" (§ 1) de la connexion riemannienne V_n. On y trouve tout d'abord le développement pour les symboles de Christoffel au voisinage d'un point régulier de V_n (§ 2). Le § suivant contient les intégrales de quelques équations différentielles. Dans le § 4 on étudie l'influence de la connexion riemannienne et de la connexion euclidienne sur les invariants différentiels d'une courbe. Le travail finit par le développement pour les coordonnées d'une surface baignée dans V_n.

Il faut remarquer expressément que les résultats obtenus ne sont que l'illustration du théorème de „réduction" de MM. Ricci et Levi-Civita, publié dans le travail, devenu classique „Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications" (Math. Ann. Bd. 54, p. 162).

Quant à la symbolique nous nous tenons à celle du livre de M. Schouten „Der Ricci-Kalkül" (Springer, 1924) dont nous supposons la connaissance parfaite. Pour désigner la valeur numérique d'une fonction quelconque F au point examiné, nous nous servons au besoin d'une des notations suivantes $\overset{0}{F}$, $\underset{0}{F}$, $(F)_0$.

* * *

§ I. Paramètres locaux.

1) Construction. Désignons par x^ν[1]) les n paramètres d'une variété n fois étendue à connexion riemannienne V_n, par

[1]) Les indices grecs prennent toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n.

$g_{\lambda\mu}$ son tenseur métrique et par $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$ les symboles de Christoffel. Transformons les paramètres x^{ν} d'après

$$(1,1) \qquad 'x = 'x(x), \qquad \left(\varDelta = \left\| \frac{\partial' x}{\partial x} \right\| \neq 0 \right)$$

et supposons les fonctions $'x(x)$ continues et dérivables. Cette transformation a pour conséquence la transformation des composantes du tenseur métrique

$$(1,2) \qquad 'g_{\lambda\mu} = Q^{\alpha}_{\lambda} Q^{\beta}_{\mu} g_{\alpha\beta}, \qquad \left(Q^{\nu}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial' x^{\lambda_1} \ldots \ldots \partial' x^{\lambda_s}} \right),$$

tandis que les symboles de Christoffel et leurs dérivées successives se transforment d'après

$$(1,3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &'\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} Q^{\nu}_{\alpha} = Q^{\alpha}_{\lambda} Q^{\beta}_{\mu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} + Q^{\nu}_{\lambda\mu} \\ &'\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu,\omega} Q^{\nu}_{\alpha} + '\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} Q^{\nu}_{\alpha\omega} = 2 Q^{\alpha}_{\lambda\omega} Q^{\beta}_{\mu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} + Q^{\alpha}_{\lambda} Q^{\beta}_{\mu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta,\gamma} Q^{\gamma}_{\omega} + Q^{\nu}_{\lambda\mu\omega} \\ &'\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu,\omega\xi} Q^{\nu}_{\alpha} + '\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu,\omega} Q^{\nu}_{\alpha\xi} + '\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} \cdot Q^{\nu}_{\alpha\omega\xi} + '\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu,\xi} Q^{\nu}_{\alpha\omega} = \\ &= 2 (Q^{\alpha}_{\lambda\omega\xi} Q^{\beta}_{\mu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} + Q^{\alpha}_{\lambda\omega} Q^{\beta}_{\mu\xi} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} + Q^{\alpha}_{\lambda\omega} Q^{\beta}_{\mu} Q^{\gamma}_{\xi} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta,\gamma}) \\ &+ 2 Q^{\alpha}_{\lambda\xi} Q^{\beta}_{\mu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta,\gamma} Q^{\gamma}_{\omega} + Q^{\alpha}_{\lambda} Q^{\beta}_{\mu} Q^{\gamma}_{\omega\xi} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta,\gamma} + \\ &+ Q^{\alpha}_{\lambda} Q^{\beta}_{\mu} Q^{\gamma}_{\omega} Q^{\delta}_{\xi} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + Q^{\nu}_{\lambda\mu\omega\xi} \end{aligned} \right.$$

$$\left('\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu,\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \frac{\partial' \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}}{\partial' x^{\alpha_1} \ldots \ldots \partial' x^{\alpha_s}}, \quad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu,\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_s}} \right).$$

Développons les n fonctions $'x^{\nu}(x)$ dans le voisinage infiniment petit d'un point $P(x = \overset{0}{x})$ de V_n

$$(2,1) \qquad x^{\nu} - \overset{0}{x^{\nu}} = \sum \frac{1}{p!} \overset{0}{Q}{}^{\nu}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \, 'x^{\alpha_1} \ldots 'x^{\alpha_p}.$$

Pour déterminer cette transformation, nous choisissons les coefficients $Q^{\nu}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ d'une façon convenable. Soit tout d'abord au point P

$$(2,2) \qquad \overset{0}{Q}{}^{\nu}_{\lambda} = A^{\nu}_{\lambda} \quad (A^{\nu}_{\lambda} = \text{l'affineur-unité, delta de Kronecker}).$$

Or, parce qu'on peut toujours supposer $g_{\lambda\mu}$ de la forme euclidienne $e_{\lambda\mu}$ en P on aura d'après (1, 2) à ce point

$$(3,1) \qquad '\overset{0}{g}_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu}.$$

Quant à $\overset{0}{Q}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$, nous pouvons supposer qu'il soit

$$(2,3) \qquad \overset{0}{Q}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = -\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$$

parce que $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$ aussi que $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ sont symetriques en $\lambda\mu$. Il s'ensuit d'après (1, 3)

$$(3,2) \qquad '\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = 0.$$

Le coefficient $\overset{0}{Q}{}^{\nu}_{\lambda\mu\omega}$ peut être déterminé de telle manière qu'il soit

$$(2,4) \qquad \overset{0}{Q}{}^{\nu}_{\lambda\mu\omega} = 2\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\alpha(\mu}\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\lambda\omega)} - \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{(\lambda\mu,\omega)}\text{ [2]}.$$

Il s'ensuit d'après (1, 3)

$$(3,3) \qquad '\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{(\lambda\mu,\omega)} = 0.$$

On reconnaît déjà la méthode à employer pour déterminer les $\overset{0}{Q}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}$. On procède toujours de telle manière que l'on ait

$$(3,4) \qquad '\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\cdots\lambda_s)} = 0.$$

En substituant les valeurs de $\overset{0}{Q}{}^{\nu}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}$ dans (2, 1) on obtient

$$(2,5) \qquad \boxed{\begin{aligned} x^{\nu} - \overset{0}{x}{}^{\nu} = {}&'x^{\nu} - \frac{1}{2!}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}\,'x^{\lambda}\,'x^{\mu} \\ &+ \frac{1}{3!}(2\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\omega} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu,\omega})_0\,'x^{\lambda}\,'x^{\mu}\,'x^{\omega} \\ &+ \frac{1}{4!}(-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu,\omega\xi} + 4\Gamma^{\alpha}_{\lambda\xi}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu,\omega} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\omega\xi} + 2\Gamma^{\alpha}_{\lambda\omega,\xi}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} + \\ &- 2\Gamma^{\alpha}_{\lambda\omega}\Gamma^{\beta}_{\mu\xi}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - 4\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}\Gamma^{\beta}_{\omega\xi})_0\,'x^{\lambda}\,'x^{\mu}\,'x^{\omega}\,'x^{\xi} + \dots \end{aligned}}$$

tandis que la transformation inverse devient

$$(1,4) \qquad \boxed{\begin{aligned} 'x^{\nu} = {}& x^{\nu} - \overset{0}{x}{}^{\nu} + \frac{1}{2}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}(x^{\lambda} - \overset{0}{x}{}^{\lambda})(x^{\mu} - \overset{0}{x}{}^{\mu}) + \\ &+ \frac{1}{3!}(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu,\omega} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\omega})_0(x^{\lambda} - \overset{0}{x}{}^{\lambda})(x^{\mu} - \overset{0}{x}{}^{\mu})(x^{\omega} - \overset{0}{x}{}^{\omega}) + \dots \end{aligned}}$$

---

[2]) Si $X_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est une expression quelconque, $X_{(\lambda_1\ldots\lambda_p)}$ désigne la somme de $p!$ permutations différentes, divisée par $\frac{1}{p!}$.

Ce sont des cas particuliers des formules (1,1), (2,1). On ne leur a consacré une démonstration spéciale que pour faire apercevoir la méthode de construction des paramètres que nous désignons comme „paramètres locaux". Ces paramètres doivent satisfaire à (1,4) resp. (2,5). — On supprime, par une convention d'écriture, l'accent et on écrit simplement x^ν et $\Phi(x)$ pour les paramètres locaux et leurs fonctions au lieu de $'x^\nu$ et $'\Phi('x)$.

2) Conséquences. Soit

$$K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\nu} = \Gamma^\nu_{\lambda\omega,\mu} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu,\omega} - \Gamma^\nu_{\alpha\omega}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\omega}$$

l'affineur de Riemann-Christoffel et

$$K_{\omega\nu} = g^{\mu\lambda} K_{\omega\mu\lambda\nu}$$

le tenseur, dont les directions principales sont en même temps les directions principales de V_n. L'emploi des paramètres locaux nous permet de déduire les formules, valables au point P

$$\begin{aligned} &\overset{0}{\Gamma}{}^\nu_{\mu(\alpha,\beta)} = \tfrac{1}{3}\overset{0}{K}{}_{\mu(\alpha\beta)}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\gamma}, \quad \overset{0}{\Gamma}{}^\nu_{\mu(\alpha,\beta\gamma)} = -\tfrac{1}{2}(\nabla_{(\alpha} K_{\beta\cdot\gamma)\mu}^{\cdot\,\nu})_0 \\ &\overset{0}{\Gamma}{}^\nu_{\mu(\alpha,\beta\gamma\delta)} = -\tfrac{3}{5}(\tfrac{2}{9}K_{(\alpha\cdot\beta}^{\cdot\,\varrho\,\cdot\,\nu} K_{\delta\cdot\gamma)\mu}^{\cdot\,\omega}\, g_{\varrho\omega} + \nabla_{(\alpha}\nabla_\beta K_{\gamma\cdot\delta)\mu}^{\cdot\,\nu})_0, \\ (3,4)^{3)}\quad &\overset{0}{g}_{\mu\lambda,\alpha} = 0,\ \overset{0}{g}_{\mu\lambda,\alpha\beta} = +\tfrac{2}{3}\overset{0}{K}_{\mu(\alpha\beta)\lambda},\ \overset{0}{g}_{\mu\lambda,\alpha\beta\gamma} = -A_{(\gamma}^{\varrho}(\nabla_\alpha K_{\beta)\mu\varrho\lambda})_0 \\ &\overset{0}{g}_{\mu\lambda,\alpha\beta\gamma\delta} = (-\tfrac{6}{5}A_{(\delta}^{\varrho}\nabla_\alpha\nabla_\beta K_{\gamma)\mu\varrho\lambda} - \tfrac{16}{15}K_{\mu(\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varrho} A_\delta^\omega K_{\gamma)\lambda\omega\varrho})_0 \end{aligned}$$

(∇_μ = le symbole de la dérivée covariante de V_n).

Il sera fait, dans la suite, un usage fréquent de ces formules.

2) Symboles de Christoffel.

Si l'on effectue la variation infiniment petite des paramètres x, les $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ subissent à leurs tours une variation donnée par

$$(4,1)\qquad \Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \overset{0}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu} + \sum \frac{1}{p!}\overset{0}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu,\alpha_1\ldots\alpha_p} x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_p}.$$

Multiplions cette équations par x^μ, ce qui nous donne

$$(4,2)\qquad \Gamma^\nu_{\lambda\mu}x^\mu = \overset{0}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}x^\mu + \sum \frac{1}{p!}\overset{0}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu,\alpha_1\ldots\alpha_p} x^\mu x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_p}.$$

---

[3]) Voir Hlavatý „Les paramètres locaux dans une variété de Riemann" Rendiconti della r. Accademia dei Lincei, Vol. IV, série 6, fasc. 3—4, p. 99—103.

En substituant aux coefficients de cette série les valeurs tirées de (3,4), on obtient

(4,3)
$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} x^{\lambda} = -\frac{1}{3} \overset{0}{K}_{\dot{\alpha}\dot{\mu}\beta}{}^{\nu} x^{\alpha} x^{\beta} - \frac{1}{4}(\nabla_{\alpha} K_{\dot{\beta}\dot{\mu}\gamma}{}^{\nu})_0 x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} + - \frac{3}{5.3!}(\tfrac{2}{3} K_{\dot{\alpha}\dot{\varrho}\beta}{}^{\nu} K_{\dot{\gamma}\dot{\mu}\delta}{}^{\varrho} + \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} K_{\dot{\gamma}\dot{\mu}\delta}{}^{\nu})_0 x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} x^{\delta} + \ldots$$

Cette formule est importante surtout au point de vue de l'analyse affinorielle. — Si V_h est à courbure constante K, on a

$$K_{\omega\mu\lambda\nu} = K(g_{\omega\lambda} g_{\mu\nu} - g_{\omega\nu} g_{\mu\lambda})$$

et l'équation (4,3) se réduit à

(4,4) $$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} x^{\lambda} = -\tfrac{1}{3} K(\tfrac{1}{16} KS^2 + 1)(S^2 A^{\nu}_{\mu} - x^{\nu} x^{\beta} e_{\mu\beta}) + \ldots$$

avec $S^2 = x^{\lambda} x^{\mu} e_{\lambda\mu}$. — La formule (4,3) fait clairement voir la différence qui existe entre les symboles de Chritoffel pour la connexion riemannienne et ceux pour la connexion euclidienne de la variété examinée.

3) Vecteurs, densités.

1) Supposons une courbe $x^{\nu}(s)$ ($s =$ l'arc) dans V_n et désignons par $\underset{1}{v}^{\nu} = v^{\nu}$ resp. $\underset{e+1}{v}^{\nu}$ son vecteur-unité tangent, resp. son e-ième vecteur-unité normal et par $\underset{e}{k}$ sa e-ième courbure. Imaginons de plus un champ vectoriel a^{ν} qui ne dépend que de s. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant: Si l'équation

(5,1) $$\Theta a^{\nu} = a^{\nu\prime} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} a^{\lambda} v^{\mu}, \quad (\Theta = v^{\alpha}\nabla_{\alpha},\ \frac{d}{ds}(\,) = (\,)')$$

admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point $P(s=0)$, cette intégrale est de la forme

(5,2)
$$a^{\nu} = \underset{0}{a}^{\nu} + s(\Theta a^{\nu})_0 + \frac{s^2}{2!}[\Theta^2 a^{\nu} + \tfrac{1}{3} v^{\omega} v^{\mu} a^{\lambda} K_{\dot{\omega}\dot{\lambda}\mu}{}^{\nu}]_0 + + \frac{s^3}{3!}[\Theta^3 a^{\nu} + \tfrac{1}{2} v^{\omega} v^{\lambda} a^{\mu} \Theta K_{\dot{\omega}\dot{\mu}\lambda}{}^{\nu} + K_{\dot{\omega}\dot{\mu}\lambda}{}^{\nu} v^{\omega} v^{\lambda} \Theta a^{\mu} + - \underset{1}{k} a^{\omega} v^{\mu} \underset{2}{v}^{\lambda} K_{\dot{\omega}\dot{\mu}\lambda}{}^{\nu}]_0 + \ldots$$

D'après le théorème d'existence bien connu l'intégrale cherchée est en général

$$a^\nu = \underset{0}{a^\nu} + \sum \frac{s^p}{p!} \underset{0}{a^{\nu(p)}}.$$

Pour démontrer notre théorème, il suffit de trouver les valeurs de $\underset{0}{a^{\nu(p)}}$. En supposant Θa^ν donné, les opérations par lesquelles on calcule ces coefficients se réduisent à l'itération de l'opération Θ. En tenant compte de (5,1) on trouve d'après (3,3)

$$(\Theta a^\nu)_0 = \underset{0}{a^{\nu'}}, \qquad (\Theta^2 a^\nu)_0 = (a^{\nu''} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu,\omega}\, a^\lambda v^\mu v^\omega)_0$$
$$(\Theta^3 a^\nu)_0 = [a^{\nu'''} + v^\alpha v^\beta (\Gamma_{\lambda\mu,\alpha\beta}\, a^\lambda v^\mu + 3\Gamma^\nu_{\lambda\alpha,\beta}\, \Theta a^\lambda) +$$
$$+ a^\lambda \underset{2}{v^\mu} v^\omega \underset{1}{k} (2\Gamma^\nu_{\lambda\mu,\omega} + \Gamma^\nu_{\lambda\omega,\mu})]_0, \ldots\ldots$$

Mais on a d'après (3,4) et (3,3)

$$a^\lambda \underset{2}{v^\omega} v^\mu (2\Gamma^\nu_{\lambda\mu,\omega} + \Gamma^\nu_{\lambda\omega,\mu})_0 = a^\lambda \underset{2}{v^\omega} v^\mu (\Gamma^\nu_{\lambda\omega,\mu} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu,\omega})_0 = \underset{0}{a^\lambda} \underset{2}{v^\omega} v^\mu \overset{0}{K}{}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}.$$

Par suite de ces équations, les coefficients $\underset{0}{a^{\nu(p)}}$ sont donc

$$\underset{0}{a^{\nu'}} = (\Theta a^\nu)_0, \qquad \underset{0}{a^{\nu''}} = (\Theta^2 a^\nu + \tfrac{1}{3} K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, v^\omega v^\lambda a^\mu)_0$$
$$\underset{0}{a^{\nu'''}} = (\Theta^3 a^\nu + \tfrac{1}{2} v^\omega v^\lambda a^\mu\, \Theta K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, v^\omega v^\lambda\, \Theta a^\mu - a^\omega v^\mu \underset{2}{v^\lambda} \underset{1}{k} K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu})_0, \ldots$$

Le théorème est ainsi démontré. La formule (5,2) simplifie, si l'on suppose en P les deux directions a^ν et v^ν coïncidentes:

$$(5,3) \quad a^\nu = \underset{0}{a^\nu} + s(\Theta a^\nu)_0 + \frac{s^2}{2!}(\Theta^2 a^\nu)_0 + \frac{s^3}{3!}(\Theta^3 a^\nu + K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, v^\omega v^\lambda\, \Theta a^\mu)_0 + \ldots$$

Si le déplacement du vecteur a^ν est „parallèle“ ($\Theta a^\nu = 0$) l'intégrale (5,2) devient

$$(5,4) \quad a^\nu = \underset{0}{a^\nu} + \frac{s^2}{3!}(K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, v^\omega v^\lambda a^\mu)_0 + \frac{s^3}{2.3!}(v^\omega v^\lambda a^\mu\, \Theta K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + $$
$$- 2\underset{1}{k} a^\omega v^\mu \underset{2}{v^\lambda} K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu})_0 + \ldots$$

et si, de plus, $x^\nu(s)$ est une géodésique

$$(5,5) \quad a^\nu = \underset{0}{a^\nu} + \frac{s^2}{3!}(K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, v^\omega v^\lambda a^\mu)_0 + \frac{s^3}{2.3!}(v^\omega v^\lambda a^\mu\, \Theta K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu})_0 + \ldots$$

On a donc en ces cas

$$\lim_{s\to 0} \frac{a^\nu - \underset{0}{a^\nu}}{s^2} = \frac{1}{3!}(K_{\dot{\omega}\dot{\mu}\lambda}{}^{\nu} v^\omega v^\lambda a^\mu)_0$$

L'application de la même méthode nous mène à l'intégrale de l'équation

$$(6,1) \qquad \frac{dx^\nu}{ds} = v^\nu$$

qui est de la forme[3])

$$x^\nu = \underset{0}{x^\nu} + s\underset{0}{v^\nu} + \frac{s^2}{2!}(\Theta v^\nu)_0 + \frac{s^3}{3!}(\Theta^2 v^\nu)_0 + \frac{s^4}{4!}[\Theta^3 v^\nu + \underset{1}{k} K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}}{}^{\nu}]_0 +$$

$$(6,2) \qquad + \frac{s^5}{5!}[\Theta^4 v^\nu + 2\underset{1}{k}\,\Theta K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}}{}^{\nu} - 3\underset{1}{k^2} K_{\dot{2}\dot{1}\dot{2}}{}^{\nu} + \tfrac{7}{3} K_{\dot{1}\dot{\alpha}\dot{1}}{}^{\nu}\,\Theta^2 v^\alpha]_0 + \ldots,$$

où l'on a écrit pour les composantes orthogonales d'un affineur $V_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$

$$V_{a_1 \ldots a_p} = \underset{a_1}{v^{\lambda_1}} \ldots \underset{a_p}{v^{\lambda_p}}\, V_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}.$$

2) Le théorème du § précédent n'est qu'un cas particulier du théorème plus général que nous traiterons dans ce §. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles de la forme suivante

$$(7,1) \quad \nabla_\mu a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} - \sum_u \Gamma^{\nu}_{\lambda_u \mu}\, a_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{u-1} \nu \lambda_{u+1} \ldots \lambda_p}, \quad (u = 1, \ldots p)_0$$

où les quantités $\frac{\partial}{\partial x^\mu} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ sont fonctions holomorphes dans le domaine du point $P(x = 0)$. Le théorème général peut s'énoncer ainsi: Si les affineurs

$$F_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu} = \nabla_\mu a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p};\; F_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu\omega} = \nabla_\omega F_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu} - \tfrac{1}{3} \sum_u K_{\dot{\omega}\lambda_u \dot{\mu}}{}^{\nu} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} \nu \lambda_{n+1} \ldots \lambda_p}$$

$$(u = 1, \ldots p)$$

$$F_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu\omega\xi} = \nabla_\xi \nabla_\omega F_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu} - \sum_u K_{\dot{\omega}\lambda_u \dot{\mu}}{}^{\nu} F_{\lambda_1 \ldots \lambda_{u-1} \nu \lambda_{u+1} \ldots \lambda_p \xi} +$$

$$- \tfrac{1}{2} \sum_u a_{\lambda_1 \ldots \lambda_{u-1} \nu \lambda_{u+1} \ldots \lambda_p} \nabla_\xi K_{\dot{\omega}\lambda_u \dot{\mu}}{}^{\nu}, \ldots$$

sont holomorphes dans le domaine du point $P(x=0)$ il existe un seul système

(7,2)
$$\begin{aligned}
a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} &= \overset{0}{a}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} + x^{\mu} (\nabla_{\mu} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p})_0 + \\
&\frac{1}{2!} x^{\mu} x^{\omega} (\nabla_{\omega} \nabla_{\mu} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} - \frac{1}{3} \sum_u K_{\dot{\omega} \dot{\lambda}_u \mu}{}^{\nu} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_{u-1} \nu \lambda_{u+1} \ldots \lambda_p})_0 \\
&+ \frac{1}{3!} x^{\mu} x^{\omega} x^{\xi} (\nabla_{\xi} \nabla_{\omega} \nabla_{\mu} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} - \sum_u K_{\dot{\omega} \dot{\lambda}_u \mu}{}^{\nu} \nabla_{\xi} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_{u-1} \nu \lambda_{u+1} \ldots \lambda_p} + \\
&- \frac{1}{2} \sum_u a_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} \nu \lambda_{u+1} \ldots \lambda_p} \nabla_{\xi} K_{\dot{\omega} \dot{\lambda}_u \mu}{}^{\nu})_0 + \ldots
\end{aligned}$$

satisfaisant à (7,1) et holomorphe dans le domaine du point P.

Il est aisé de voir que pour démontrer ce théorème, il suffit — en vertu du théorème d'existence — de vérifier que les affineurs F prennent à P les valeurs telles que

$$\overset{0}{F}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \mu} = \left(\frac{\partial a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}}{\partial x^{\mu}} \right)_0; \quad \overset{0}{F}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p (\mu \omega)} = \left(\frac{\partial a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\omega}} \right)_0; \quad \overset{0}{F}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p (\mu \omega \xi)} =$$
$$= \left(\frac{\partial a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\omega} \partial x^{\xi}} \right)_0; \ldots .$$

C'est ce que l'on obtient moyennant l'itération du symbole ∇_{μ} appliquée à (7,1). Nous n'insisterons pas sur le développement du calcul la méthode étant analogue à celle du § précédent.

Un cas intéressant se présente si l'on calcule l'intégrale de l'équation

(8,1) $$\nabla_{\omega} g_{\lambda \mu} = 0$$ (Lemma de † Ricci)

qui est

(8,2)[8])
$$\begin{aligned}
g_{\lambda \mu} &= e_{\lambda \mu} - \tfrac{1}{3} x \;\; x^{\beta} \overset{0}{K}_{\alpha \mu \beta \lambda} - \frac{1}{3!} x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} (\nabla_{\alpha} K_{\beta \varrho \gamma \lambda})_0 \\
&+ \frac{1}{5!} x^{\alpha} x^{\beta} x^{\gamma} x^{\delta} (-6 \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} K_{\gamma \mu \delta \lambda} + \frac{16}{3} K_{\dot{\alpha} \dot{\mu} \beta}{}^{\varrho} K_{\gamma \lambda \delta \varrho})_0
\end{aligned}$$

Les deux premiers membres à droite sont dus à Riemann (pour V_n à courbure constante).

4. Nous disons que la fonction $\overset{p}{\mathfrak{v}}$ est une densité scalaire du poids p $\left(\lesseqgtr 0\right)$ si pour tout système de valeurs x et $'x$ satisfaisant aux relations (1, 1) les valeurs de $'\overset{p}{\mathfrak{v}}$ et $\overset{p}{\mathfrak{v}}$ satisfont à l'équation de la forme

$$(1,5) \qquad '\overset{p}{\mathfrak{v}} = |\varDelta^p|\,\overset{p}{\mathfrak{v}} \qquad \left(\varDelta = \left\| \frac{\partial' x}{\partial x} \right\| \neq 0\right).$$

J'ai exposé dans un autre Mémoire[4]) l'algorithme de l'analyse des densités. On y trouve les formules, dont le cas spécial est

$$(9,2) \qquad \nabla_\mu \overset{p}{\mathfrak{v}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \overset{p}{\mathfrak{v}} + p\, \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} \overset{p}{\mathfrak{v}}.$$

On peut démontrer que ce système d'équations aux dérivées partielles admet l'intégrale

$$(9,2) \qquad \boxed{\begin{aligned} \overset{p}{\mathfrak{v}} = (\overset{p}{\mathfrak{v}})_0 &+ x^\alpha (\nabla_\alpha \overset{p}{\mathfrak{v}})_0 + \frac{1}{2!} x^\alpha x^\beta \left(\nabla_\alpha \nabla_\beta \overset{p}{\mathfrak{v}} - \frac{p}{3} K_{\alpha\beta}\right)_0 + \\ &+ \frac{1}{3!} x^\alpha x^\beta x^\gamma \left(\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \overset{p}{\mathfrak{v}} - p K_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \overset{p}{\mathfrak{v}} - \frac{p}{2} \overset{p}{\mathfrak{v}} \nabla_\alpha K_{\beta\gamma}\right)_0 \\ &+ \frac{1}{4!} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta \Big[\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla_\delta \overset{p}{\mathfrak{v}} - 2p K_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\delta \overset{p}{\mathfrak{v}} + \\ &\qquad - 2p (\nabla_\beta \overset{p}{\mathfrak{v}})(\nabla_\beta K_{\gamma\delta}) + \\ &+ \frac{3}{5} p \overset{p}{\mathfrak{v}} \left(- \nabla_\alpha \nabla_\beta K_{\gamma\delta} + \frac{2}{9} K_{\dot{\alpha}\varrho\dot{\beta}}{}^{\lambda} K_{\dot{\gamma}\lambda\dot{\delta}}{}^{\varrho} + \frac{5p}{9} K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta}\right)\Big]_0 + \ldots \end{aligned}}$$

holomorphe dans le domaine point $P(x=0)$, si les dérivées successives $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \overset{p}{\mathfrak{v}}, \frac{\partial}{\partial x^\mu \partial x^\omega} \overset{p}{\mathfrak{v}}, \ldots$ sont régulières dans le domaine de ce point. La démonstration de ce théorème applique le calcul, qui n'est au fond que celui que l'on a fait pour démontrer les théorèmes précédents.

---

[4]) „Théorie des densités dans le déplacement général", paraîtra dans „Annali di Matematica".

Le déterminant g du tenseur métrique est une densité scalaire du poids $p = -2$. Parce que l'on a

$$g^{\lambda\mu} \nabla_\omega g_{\lambda\mu} = 0$$

il s'ensuit

$$\nabla_\omega g = 0. \tag{10,1}$$

L'intégrale de cette équation est un cas particulier de (9,2). En tenant compte de ce que les paramètres locaux nous permettent de poser $\overset{0}{g} = 1$, on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} g = 1 &+ \frac{1}{3} x^\alpha x^\beta \overset{0}{K}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3!} x^\alpha x^\beta x^\gamma (\nabla_\alpha K_{\beta\gamma})_0 + \\ &+ \frac{1}{4!} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta (\tfrac{4}{3} K_{\alpha\beta} K_{\gamma\delta} \quad \tfrac{4}{15} K_{\dot{\alpha}\dot{\varrho}\dot{\beta}}{}^{\lambda} K_{\dot{\gamma}\dot{\lambda}\dot{\delta}}{}^{\varrho} + \tfrac{6}{5} \nabla_\alpha \nabla_\beta K_{\gamma\delta})_0 + \dots \end{aligned}} \tag{10,2}$$

Si la connexion V_n est einsteinienne ($K_{\mu\lambda} = 0$) l'intégrale (9,2) resp. (10,2) se réduit à

$$\begin{aligned} \overset{p}{\mathfrak{v}} = (\overset{p}{\mathfrak{v}})_0 &+ x^\alpha (\nabla_\alpha \overset{p}{\mathfrak{v}})_0 + \frac{1}{2!} x^\alpha x^\beta (\nabla_\alpha \nabla_\beta \overset{p}{\mathfrak{v}})_0 + \frac{1}{1!} x^\alpha x^\beta x^\gamma (\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \overset{p}{\mathfrak{v}})_0 \\ &+ \frac{1}{4!} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta [\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla_\delta \overset{p}{\mathfrak{v}} + \frac{2}{15} p \overset{p}{\mathfrak{v}} K_{\dot{\alpha}\dot{\mu}\dot{\beta}}{}^{\lambda} K_{\dot{\gamma}\dot{\lambda}\dot{\delta}}{}^{\mu}]_0 + \dots \end{aligned} \tag{9,3}$$

resp.

$$g = 1 - \tfrac{1}{90} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta (K_{\dot{\alpha}\dot{\lambda}\dot{\beta}}{}^{\mu} K_{\dot{\gamma}\dot{\mu}\dot{\delta}}{}^{\lambda})_0 + \dots \tag{10,3}$$

§ 4) Courbe dans V_n et R_n.

1. Considérons deux connexions dans notre variété n-fois étendue: La connexion riemannienne V_n et la connexion euclidienne R_n. Si une courbe $x^\nu(p)$ se trouve dans notre variété, il est évident qu'on puisse l'étudier en même temps dans V_n et dans R_n. Nous nous proposons d'étudier dans ce § les relations qui existent entre les courbures resp. vecteurs normaux de la courbe examinée dans V_n ou dans R_n. Autrement dit, nous étudierons l'influence des connexions V_n, R_n sur les invariants différentiels de $x^\nu(p)$. Nous désignerons par s, $v^\nu = \underset{1}{v^\nu}$, $\underset{e+1}{v^\nu}$, $\underset{e}{k}$ l'arc de la courbe $x^\nu(p)$ dans V_n, son vecteur-unité tangent, son e-ième vecteur-unité normal et

sa e-ième courbure Les expressions analogues pour la même courbe dans R_n seront $t, w^\nu = \underset{1}{w^\nu}; \underset{e+1}{w^\nu}, \underset{e}{l}$. Les formules de Frenet sont[5])

$$(11,1)\qquad \Theta \underset{e}{v^\nu} = \underset{e}{k}\underset{e+1}{v^\nu} - \underset{e-1}{k}\underset{e-1}{v^\nu} \quad (e = 1...,n;\ \underset{0}{k} = \underset{n}{k} = 0).$$

On peut s'en servir pour trouver les vecteurs $\underset{(p)}{v^\nu}$ qui interviennent dans

$$(11,2)\qquad \Theta^p v^\nu = \underset{1}{k} \ldots \underset{p}{k}\underset{p+1}{v^\nu} + \underset{(p)}{v^\nu}; \qquad (p = 1,\ldots n-1)$$

$\underset{(p)}{v^\nu}$ est situé dans le p-vecteur osculateur de la courbe. On trouve au point $P(s=0)$ en paramètres locaux

$$x^{\nu\prime} = \underset{1}{v^\nu};\ x^{\nu\prime\prime} = (\Theta v^\nu)_0;\ x^{\nu\prime\prime\prime} = (\Theta^2 v^\nu)_0;\ x^{\nu\prime\prime\prime\prime} = (\Theta^3 v^\nu + K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}}{}^\nu \underset{1}{k})_0$$

$$(11,3)^{3)}\ x^{\nu\prime\prime\prime\prime\prime} = (\Theta^4 v^\nu + 2\underset{1}{k}\,\Theta K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}}{}^\nu - 3\underset{1}{k}^2 K_{\dot{2}\dot{1}\dot{2}}{}^\nu + \tfrac{7}{3} K_{\dot{1}\dot{\alpha}\dot{1}}{}^\nu \Theta^2 \dot{v}^\alpha)_0;\ldots$$

$$\left(\frac{d}{ds}(\,) = (\,)';\ V_{\dot{a}_1 \ldots a_p} = \underset{a_1}{v^{\lambda_1}} \ldots \underset{a_p}{v^{\lambda_p}}\, V_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}\right).$$

Les relations analogues sont pour la courbe dans R_n. — Soit P' le point infiniment voisin de P sur $x^\nu(p)$ et désignons par S la distance géodésique PP' dans V_n et par T la distance géodésique PP' dans R_n. On trouve sans difficulté[3])

$$S^2 = s^2 - \frac{s^4}{4!}(2\underset{1}{k}^2)_0 - \frac{s^5}{5!}5(\underset{1}{k}^2)'_0 + \frac{s^6}{6!}2[\underset{1}{k}^2(\underset{1}{k}^2 + \underset{2}{k}^2) - 8\underset{1}{k}'^2 + \\ - 9\underset{1}{k}\underset{1}{k}'' - 3\underset{1}{k}^2 K_{1212}]_0 + \ldots$$

$$T^2 = t^2 - \frac{t^4}{4!}(2\underset{1}{l}^2)_0 - \frac{t^5}{5!}\left(\frac{d\underset{1}{l}^2}{dt}\right)_0 5 + \frac{t^6}{6!}2[\underset{1}{l}^2(\underset{1}{l}^2 + \underset{2}{l}^2) - 8\underset{1}{\dot{l}}^2 - 9\underset{1}{l}\underset{1}{\ddot{l}}]_0 + \ldots,$$

$$\left(\frac{d(\,)}{dt} = (\dot{\,})\right).$$

Si nous considérons notre variété n-fois étendue attachée à un système quelconque de repérage, les symboles de Christoffel pour R_n ne sont pas nuls en général. Nous restreignons maintenant la généralité du problème en ne considérant qu'une telle connexion V_n, que les paramètres locaux au point P pour V_n

---

[5]) Struik „Grundzüge der mehrdimensionalen Differenzialgeometrie"... (1922, Springer, p. 76).

sont en même temps les paramètres locaux à ce point pour R_n. On satisfait à cette supposition en admettant à cause de (1, 4) qu'il soit en P

$$\overset{0}{\Lambda}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}, \quad \overset{0}{\Lambda}{}^{\nu}_{(\lambda\mu,\omega)} + \overset{0}{\Lambda}{}^{\nu}_{\alpha(\lambda}\overset{0}{\Lambda}{}^{\alpha}_{\mu\omega)} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{(\lambda\mu,\omega)} \quad \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\alpha(\lambda}\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\omega)}, \ldots,$$

où, pour le moment, $\Lambda^{\nu}_{\lambda\mu}$ et $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ sont les symboles de Christoffel pour R_n et V_n exprimés comme fonctions des paramètres du système de repérage arbitraire mentionné [6]).

Cela étant, on peut trouver en toute riguer à cause de (8, 2) pour PP' très petite

$$S^2 = T^2 \tag{12.2}$$

ou bien

$$s^2 - \frac{s^4}{4!}2(\overset{\prime}{\underset{1}{k}}{}^2)_0 - \frac{s^5}{5!}5(\underset{1}{k}{}^2)'_0 + \frac{s^6}{6!}2[\underset{1}{k}{}^2(\underset{1}{k}{}^2 + \underset{2}{k}{}^2) - 8\underset{1}{k}{}'^2 - 9\underset{1}{k}\underset{1}{k}{}'' - 3\underset{1}{k}K_{1212}]_0 + \cdots$$

$$= t^2 - \frac{t^4}{4!}2(\underset{1}{l}{}^2)_0 \frac{t^5}{5!}5\left(\frac{d\underset{1}{l}{}^2}{dt}\right)_0 + \frac{t^6}{6!}2[\underset{1}{l}{}^2(\underset{1}{l}{}^2 + \underset{2}{l}{}^2) - 8\underset{1}{\dot{l}}{}^2 - 9\underset{1}{l}\underset{1}{\ddot{l}}]_0 + \cdots \tag{13,1}$$

Cette équation valable dans le voisinage infiniment petit du point $P(t = s = 0)$ de la courbe sera notre point de départ. En la dérivant deux fois d'après s on obtient

$$2\overset{\prime}{\underset{0}{t}}{}^2 = 2.$$

Or, si l'on mesure les arcs dans la même direction, on trouve

$$\overset{0}{t'} = 1. \tag{13,2}$$

Cela nous permet de poser en P

$$\overset{0}{x}{}'^{\nu} = (\dot{x}^{\nu}t')_0 = (\dot{x}^{\nu})_0$$

et d'après (11, 3)

$$\overset{0}{v}{}^{\nu} = \overset{0}{w}{}^{\nu}. \tag{11,4}$$

---

[6]) Ces équations sont équivalentes aux conditions

$$\overset{0}{N}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \quad (\nabla_{(\omega}N_{\lambda\mu)}^{\cdot\cdot\nu})_0 = 0, \ldots$$

pour $N_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \Lambda^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$. Dans ce cas l'affineur de Riemann-Christoffel devient

$$\overset{0}{K}{}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = (\nabla_{\omega}N_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} - \nabla_{\mu}N_{\omega\lambda}^{\cdot\cdot\nu})_0.$$

La troisième dérivation de (13,1) d'après nous donne en P

$$(13,3)\qquad 6\overset{0}{t''}\overset{0}{t'}=\theta \qquad \text{ou bien} \qquad \overset{0}{t''}=\theta.$$

On a donc en P

$$\overset{0}{x^{\nu''}}=(\ddot{x}^\nu t'^2+\dot{x}^\nu t'')_0=(\ddot{x}^\nu)_0$$

et en conséquence, d'après (11,1) et (11,3)

$$(11,5)\qquad (\Theta v^\nu)_0=(\underset{1}{k}\underset{2}{v^\nu})_0=(\ddot{x}^\nu)_0=(\underset{1}{l}\underset{2}{w^\nu})_0.$$

On a donc pour $\underset{1}{k}\neq 0,\ \underset{1}{l}\neq 0$

$$(11,6)\qquad \overset{0}{\underset{1}{k}}=\overset{0}{\underset{1}{l}},\quad \overset{0}{v^\nu}=\overset{0}{w^\nu},\quad \overset{0}{\underset{2}{v^\nu}}=\overset{0}{\underset{2}{w^\nu}}.$$

La quatrième dérivation de(13,1) nous donne en P

$$(13,4)\qquad (8\overset{0}{t'}\overset{0}{t'''}-2\overset{0}{\underset{1}{\dot{l}}})=-2\overset{0}{\underset{1}{\dot{k}}},\quad \text{ou bien}\quad \overset{0}{t'''}=0.$$

Cette équation nous permet de poser

$$(\dddot{x}^\nu)_0=\overset{0}{x^{\nu'''}}=(\Theta^2 v^\nu)_0,$$

ou bien, d'après (11,1) et (11,3)

$$(11,7)\qquad (\underset{1}{k}\underset{2}{k}\underset{3}{v^\nu}+\underset{1}{k'}\underset{2}{v^\nu}-\underset{1}{k^2}\underset{1}{v^\nu})_0=(\underset{1}{l}\underset{2}{l}\underset{3}{w^\nu}+\underset{1}{\dot{l}}\underset{2}{w^\nu}-\underset{1}{l^2}\underset{1}{v^\nu})_0$$

Mais parce que l'on a $\overset{0}{\underset{2}{v^\nu}}=\overset{0}{\underset{2}{w^\nu}}$, on obtient à l'aide de la multiplication par $\overset{0}{\underset{2}{v_\nu}}=\overset{0}{\underset{2}{w_\nu}}$

$$(11,8)\qquad (\underset{1}{k'})_0=(\underset{1}{\dot{l}})_0.$$

Il s'ensuit donc pour $\underset{2}{k}\neq 0,\ \underset{2}{l}\neq 0$

$$(11,9)\qquad \overset{0}{\underset{2}{k}}=\overset{0}{\underset{2}{l}},\quad \overset{0}{\underset{3}{v^\nu}}=\overset{0}{\underset{3}{w^\nu}}.$$

En résumé, les premières deux courbures, la première dérivée de la première courbure d'après l'arc, le vecteur tangent et les premiers deux vecteurs-unités normaux de la courbe considérée comme courbe de V_n ou de R_n sont identiques en P.

2. La cinquième dérivation de (13,1) nous donne

$$(13,5)\qquad (t'\,t''''-t'^5\underset{1}{l}\underset{1}{\dot{l}})_0=-\overset{0}{\underset{1}{k}}\overset{0}{\underset{1}{k'}}.$$

Cette équation se réduit à cause des relations déjà connues à

$$\overset{0}{t''''} = 0$$

en P. On obtient donc

$$(x^{\nu''''})_0 = (x^{\nu})_Q.$$

Mais en tenant compte de (11, 1—3) on trouve à l'aide de cette relation

$$(11,10)\quad (\Theta^3 v^\nu + K_{1\dot{2}1}{}^{\nu}\underset{1}{k})_0 = (\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}\,\underset{3}{k}\,\underset{4}{v^\nu} + \underset{(3)}{v^\nu} + K_{1\dot{2}1}{}^{\nu}\underset{1}{k})_0 = (x^{\nu''''})_0 =$$
$$= (\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}\,\underset{3}{l}\,\underset{4}{w^\nu} + \underset{(3)}{w^\nu})_0 = (x^\nu)_0.$$

La multiplication par $\underset{4}{v_\nu}$ resp. $\underset{4}{w_\nu}$ nous conduit à

$$(\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}\,\underset{3}{k} + \underset{1}{k}K_{1214})_0 = (\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}\,\underset{3}{l}\cos\alpha)_0, \text{ resp. } (\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}\,\underset{3}{k}\cos\alpha + \underset{4}{w_\nu}K_{1\dot{2}1}{}^{\nu}\underset{1}{k})_0 = (\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}\,\underset{3}{l})_0,$$
$$(11,11)\qquad (\alpha = \sphericalangle\, \underset{4}{w^\nu}\,\underset{4}{v^\nu}).$$

En éliminant $(\underset{1}{k}\,\underset{2}{k})_0 = (\underset{1}{l}\,\underset{2}{l})_0$ de ces équations, on obtient

$$(14,1)\qquad \boxed{\left(\frac{K_{1214}}{\underset{4}{w_\nu}K_{1\dot{2}1}{}^{\nu}}\right)_0 = \left(\frac{\underset{3}{l}\cos\alpha - \underset{3}{k}}{\underset{3}{l} - \underset{3}{k}\cos\alpha}\right)_0}$$

La multiplication de (11, 10) par $\overset{0}{\underset{3}{v^\nu}} = \overset{0}{\underset{3}{w^\nu}}$ resp. $\overset{0}{\underset{2}{v^\nu}} = \overset{0}{\underset{2}{w^\nu}}$ nous mène aux formules

$$(11,12)\qquad (\underset{1}{\ddot{l}})_0 = (\underset{1}{k''} + K_{1212}\underset{1}{k})_0,\quad (\underset{2}{\dot{l}})_0 = (\underset{2}{k'} + K_{1213})_0$$

qui nous permettent de transcrire (11, 10)

$$(11,13)\qquad \overset{0}{K}_{1\dot{2}1}{}^{\alpha}(A^\nu_\alpha - \underset{3}{v_\alpha}\underset{3}{v^\nu} - \underset{2}{v_\alpha}\underset{2}{v^\nu} - \underset{1}{v_\alpha}\underset{1}{v^\nu})_0 = [\underset{2}{k}(\underset{4}{w^\nu}\underset{3}{l} - \underset{4}{v^\nu}\underset{3}{k})]_0.$$

Il est bien connu que l'affineur-unité peut être décomposé en deux affineurs orthogonaux. En désignant par E^ν_λ sa composante orthogonale au trivecteur osculateur, on déduit de (11, 13)

$$(K_{1\dot{2}1}{}^{\alpha}E^\nu_\alpha)_0 = [\underset{2}{k}(\underset{3}{w^\nu}\underset{3}{l} - \underset{4}{v^\nu}\underset{3}{k})]_0.$$

Or, cette équation nous apprend que les troisièmes courbures aussi

que les troisièmes vecteurs-unités normaux de la courbe examinée comme courbe de V_n ou de R_n ne sont pas identiques en général, parce que le vecteur $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}}{}^{\alpha} E^{\nu}_{\overset{4}{\alpha}}$ n'est pas nul en général. Exception fait le cas où

a) V_n est à courbure constante. Dans ce cas les composantes orthogonales de $K_{\omega\mu\lambda\nu}$ à trois indices inégaux sont nulles. Il s'ensuit $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}}{}^{\alpha} E^{\nu}_{\alpha} = 0$ et $\overset{0}{\underset{4}{v}}{}^{\nu} = \overset{0}{\underset{4}{w}}{}^{\nu}$. $\overset{0}{\underset{3}{k}} = \overset{0}{\underset{3}{l}}$ pour $\underset{2}{k}, \underset{3}{k}, \underset{3}{l} \neq 0$.

b) n est impair et l'axe de rotation a^{ν} du bivecteur osculateur lui est perpendiculaire, tandis que les vecteurs $a^{\nu}, \underset{3}{k}\underset{4}{v}{}^{\nu} - \underset{3}{l}\underset{4}{w}{}^{\nu}$ ne sont pas perpendiculaires. Car, dans ce cas on a[7])

$$0 = K_{\dot{1}\dot{2}\dot{\lambda}}{}^{\nu} a_{\nu} = - K_{12\nu\lambda} a^{\nu} \quad \text{et} \quad K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}}{}^{\nu} a_{\nu} = 0,$$

d'où il suit

$$0 = a_{\nu}(\underset{3}{k}\underset{4}{v}{}^{\nu} - \underset{3}{l}\underset{4}{w}{}^{\nu}), \qquad (\overset{0}{\underset{2}{k}} \neq 0)$$

ou bien, d'après la supposition faite sur la position des vecteurs $a^{\nu}, \underset{4}{v}{}^{\nu}\underset{3}{k} - \underset{4}{w}{}^{\nu}\underset{3}{l}$

$$\overset{0}{\underset{3}{k}} = \overset{0}{\underset{3}{l}}, \quad \overset{0}{\underset{4}{v}}{}^{\nu} = \overset{0}{\underset{4}{w}}{}^{\nu} \quad \text{pour} \quad \overset{0}{\underset{3}{k}}, \overset{0}{\underset{3}{l}} \neq 0.$$

En résumé, les troisièmes courbures et les troisièmes vecteurs-unités normaux de la courbe examinée dans V_n ou R_n ne sont pas identiques en général au point P.

3. Supposons maintenant que V_n est à courbure constante et poursuivons nos recherches. On a dans ce cas

$$K_{\omega\mu\lambda\nu} = K(g_{\omega\lambda} g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda} g_{\omega\nu})$$

et

$$(\underset{1}{k})_0 = (\underset{1}{l})_0, \quad (\underset{2}{k})_0 = (\underset{2}{l})_0, \quad (\underset{3}{k})_0 = (\underset{3}{l})_0,$$

$$(\underset{1}{k'})_0 = (\underset{1}{\dot{l}})_0, \quad (\underset{2}{k'})_0 = (\underset{2}{\dot{l}})_0, \qquad \overset{0}{\underset{i}{v}}{}^{\nu} = \overset{0}{\underset{i}{w}}{}^{\nu} \quad (i = 1, \dots 4)$$

$$(\underset{1}{k''})_0 = (\underset{1}{\ddot{l}} - \underset{1}{k} K)_0.$$

---

7) Bompiani: „La géométrie des espaces courbes et le tenseur d'énergie" (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 174, p. 737).

La sixième dérivation de (13,1) d'après $\underset{1}{s}$ nous donne

$$(12t't'''''+2[\underset{1}{l}^2(\underset{1}{l}^2+\underset{2}{l}^2)-8\underset{1}{\dot{l}}^2-9\underset{1}{l}\underset{1}{\ddot{l}}])_0=$$
$$2[\underset{1}{k}^2(\underset{1}{k}^2+\underset{2}{k}^2)-8\underset{1}{k}'^2-9\underset{1}{k}\underset{1}{k}''-3\underset{1}{k}^2K]_0.$$

En tenant compte des relations déjà connues on en déduit

(13,6) $$\overset{0}{t''''''}=(\underset{1}{k}^2K)_0.$$

Cette équation nous permet de poser en P

$$\overset{0}{x}{}^{\nu''''''}=(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}{}^{\nu}+\dot{x}^{\nu}\,t'''''')_0=(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}{}^{\nu}+v^{\nu}\underset{1}{k}^2K)_0$$

d'où il suit d'après (11,1—3)

(11,14) $$(\Theta^4v^{\nu}-3\underset{1}{k}^2K_{\dot{2}\dot{1}\dot{2}}{}^{\nu}+\tfrac{7}{3}K_{\dot{1}\dot{\alpha}\dot{1}}{}^{\nu}\,\Theta^2v^{\alpha})_0=(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}{}^{\nu}+v^{\nu}\underset{1}{k}^2K)_0.$$

En multipliant cette équation par $\underset{5}{v}_{\nu}$ resp. $\underset{5}{w}_{\nu}$ on obtient

$$(\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}\,\underset{3}{k}\,\underset{4}{k})_0=(\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}\,\underset{3}{l}\,\underset{4}{l}\cos\varphi)_0,\ \text{resp.}\ (\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}\,\underset{3}{k}\,\underset{4}{k}\cos\varphi)_0=(\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}\,\underset{3}{l}\,\underset{4}{l})_0,\ \varphi=\sphericalangle(\underset{5}{v}^{\nu}\,\underset{5}{w}^{\nu})$$

d'où il suit pour $\underset{4}{k},\underset{4}{l}\neq 0$

(11,15) $$\overset{0}{\underset{4}{k}}=\overset{0}{\underset{4}{l}},\quad \overset{0}{\underset{5}{v}}{}^{\nu}=\overset{0}{\underset{5}{w}}{}^{\nu}.$$

La multiplication par $\overset{0}{\underset{4}{v}}_{\nu}=\overset{0}{\underset{4}{w}}_{\nu}$ nous donne

$$(3\underset{1}{k}'\underset{2}{k}\,\underset{3}{k}+2\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}'\underset{3}{k}+\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}\,\underset{3}{k}')_0=(3\underset{1}{\dot{l}}\,\underset{2}{l}\,\underset{3}{l}+2\underset{1}{l}\,\underset{2}{\dot{l}}\,\underset{3}{l}+\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}\,\underset{3}{\dot{l}})_0,$$

ou bien

(11,16) $$(\underset{3}{k}')_0=(\underset{3}{\dot{l}})_0.$$

En multipliant (11,14) par $\overset{0}{\underset{3}{v}}_{\nu}=\overset{0}{\underset{3}{w}}_{\nu}$ on obtient

$$(-\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}\,\underset{3}{k}^2+3\underset{1}{k}''\underset{2}{k}+3\underset{1}{k}'\underset{2}{k}'+\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}''-\underset{2}{k}\,\underset{1}{k}^3-\underset{2}{k}^3\underset{1}{k}+\tfrac{7}{3}\underset{1}{k}\,\underset{2}{k}K)_0=$$
$$=(-\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}\,\underset{3}{l}^2+3\underset{1}{l}\,\underset{2}{\ddot{l}}+3\underset{1}{\dot{l}}\,\underset{2}{\dot{l}}+\underset{1}{l}\,\underset{2}{\ddot{l}}-\underset{2}{l}\,\underset{1}{l}^3-\underset{2}{l}^3\underset{1}{l})_0$$

ou bien

(11,17) $$(\underset{2}{\ddot{l}})_0=(\underset{2}{k}''-\tfrac{2}{3}\underset{2}{k}K)_0$$

et enfin la multiplication par $\overset{0}{\underset{2}{v}}_\nu = \overset{0}{\underset{2}{w}}_\nu$ nous donne

$$(-3\underset{1}{k'}\underset{2}{k}^2 - 3\underset{1}{k}\underset{2}{k}\underset{3}{k'} - 6\underset{1}{k}^2\underset{1}{k'} + \underset{1}{k'''} + \tfrac{7}{3}\underset{1}{k'}K)_0 =$$
$$(-3\dot{\underset{1}{l}}^2\underset{2}{l}^2 - 3\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}\,\underset{2}{l'} - 6\underset{1}{l}^2\underset{1}{l'} + \underset{1}{l'''})_0$$

ou bien

(11,18) $$(\underset{1}{\dddot{l}})_0 = (\underset{1}{k'''} + \tfrac{7}{3}\underset{1}{k'}K).$$

(La multiplication par $\overset{0}{\underset{1}{v}}_\nu = \overset{0}{\underset{1}{w}}_\nu$ ne nous donne que l'identité).

Si V_n est à courbure constante K, les premières quatre courbures et les premiers quatre vecteurs normaux de la courbe examinée dans V_n ou dans R_n sont identiques en P. On a aussi

$$(\underset{1}{\dot{l}})_0 = (\underset{1}{k'})_0, \qquad (\underset{2}{\dot{l}})_0 = (\underset{2}{k'})_0$$
$$(\underset{1}{\ddot{l}})_0 = (\underset{1}{k''} + \underset{1}{k}K)_0, \qquad (\underset{2}{\ddot{l}})_0 = (\underset{2}{k''} - \tfrac{2}{3}\underset{2}{k}K)_0$$
$$(\underset{1}{\dddot{l}})_0 = (\underset{2}{k'''} + \tfrac{7}{3}\underset{1}{k'}K)_0.$$

Si l'on voulait continuer dans ces recherches, on devrait développer plus loin les séries pour S^2 resp. T^2.

§ 5. V_2 dans V_n.

Considérons une surface $x^\nu(y_1, y_2)$ à connexion riemannienne V_2 dans V_n. Nous nous proposons de développer ses coordonnées dans le domaine d'un point régulier P. Nous introduirons pour cet effet les affineurs

$$H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} = H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\,\nu} = B_\lambda^\alpha B_\mu^\beta \nabla_\alpha B_\beta^\nu, \quad H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = H_{\omega\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = B_\omega^\alpha B_\mu^\beta B_\lambda^\gamma \nabla_\alpha H_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\,\nu},$$

où B_λ^ν désigne l'affineur-unité de V_2, et nous ferons usage des formules

$$p^\alpha \nabla_\alpha q^\nu = p^\alpha \overline{\nabla}_\alpha q^\nu + p^\lambda q^\mu H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}$$

(15,1) $$r^\alpha \nabla_\alpha p^\beta \nabla_\beta q^\nu = r^\alpha \overline{\nabla}_\alpha p^\beta \overline{\nabla}_\beta q^\nu + H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}(r^\mu p^\alpha \overline{\nabla}_\alpha q^\lambda + q^\mu r^\alpha \overline{\nabla}_\alpha p^\lambda + p^\mu r^\alpha \overline{\nabla}_\alpha q^\lambda) + p^\lambda q^\mu r^\omega H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$$

(p^ν, r^ν, q^ν sont les champs vectoriels arbitraires de V_2, $\overline{\nabla}_\mu$ est le symbole de la dérivée covariante de V_2). Les vecteurs

$$\underset{a}{e^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y_a}\text{[8]}$$

sont tangents à V_2. On a pour eux

$$\underset{a}{\Theta}\underset{b}{e^\nu} = \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y_a \partial y_b} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\underset{b}{e^\lambda}\underset{a}{e^\mu} = \underset{b}{\Theta}\underset{a}{e^\nu} \qquad (\underset{a}{\Theta} = \underset{a}{e^\lambda}\nabla_\lambda).$$

Si $\underset{a}{\overline{\Theta}} = \underset{a}{e^\lambda}\overline{\nabla}_\lambda$, nous pouvons introduire la notation comme suit

$$\underset{ab}{\bar{e}^\nu} = \underset{ba}{\bar{e}^\nu} = \underset{a}{\overline{\Theta}}\underset{b}{e^\nu} = \underset{b}{\overline{\Theta}}\underset{a}{e^\nu},\ \underset{abc}{\bar{e}^\nu} = \underset{bac}{\bar{e}^\nu} = \underset{c}{\overline{\Theta}}\underset{b}{\overline{\Theta}}\underset{a}{e^\nu} = \underset{c}{\overline{\Theta}}\underset{a}{\overline{\Theta}}\underset{b}{e^\nu}$$

$$\underset{ab}{e^\nu} = \underset{ba}{e^\nu} = \underset{a}{\Theta}\underset{b}{e^\nu} = \underset{b}{\Theta}\underset{a}{e^\nu},\ \underset{abc}{e^\nu} = \underset{bac}{e^\nu} = \underset{c}{\Theta}\underset{b}{\Theta}\underset{a}{e^\nu} = \underset{c}{\Theta}\underset{a}{\Theta}\underset{b}{e^\nu}.$$

Cela étant, il vient en raison de (15,1)

$$(15,2)\qquad \begin{aligned} \underset{ab}{e^\nu} &= \underset{ab}{\bar{e}^\nu} + \underset{a}{e^\lambda}\underset{b}{e^\mu} H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \\ \underset{abc}{e^\nu} &= \underset{abc}{\bar{e}^\nu} + 3\underset{(ab}{\bar{e}^\lambda}\underset{c)}{e^\mu} H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \underset{a}{e^\lambda}\underset{b}{e^\mu}\underset{c}{e^\omega} H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}. \end{aligned}$$

Les paramètres locaux nous permettent de poser à $P(y=0)$

$$\left(\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y_a \partial y_b}\right)_0 = \overset{0}{\underset{ab}{e^\nu}},\ \left(\frac{\partial^3 x^\nu}{\partial y_a \partial y_b \partial y_c}\right)_0 = \left(\underset{abc}{e^\nu} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu,\omega}\underset{a}{e^\lambda}\underset{b}{e^\mu}\underset{c}{e^\omega}\right)_0$$

d'où il suit d'après (15,2) et (3,4)

$$\left(\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y_a \partial y_b}\right)_0 = (\underset{ab}{\bar{e}^\nu} + \underset{a}{e^\lambda}\underset{b}{e^\mu} H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu})_0$$

$$(15,3)\qquad \left(\frac{\partial^3 x^\nu}{\partial y_a \partial y_a \partial y_a}\right)_0 = (\underset{aaa}{\bar{e}^\nu} + 3\underset{aa}{\bar{e}^\lambda}\underset{a}{e^\mu} H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \underset{a}{e^\lambda}\underset{a}{e^\mu}\underset{a}{e^\omega} H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu})_0$$

$$\left(\frac{\partial^3 x^\nu}{\partial y_a \partial y_a \partial y_b}\right)_0 = [\underset{baa}{\bar{e}^\nu} + H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}(2\underset{ab}{\bar{e}^\lambda}\underset{a}{e^\mu} + \underset{aa}{\bar{e}^\lambda}\underset{b}{e^\mu}) + \underset{a}{e^\omega}\underset{b}{e^\lambda}\underset{a}{e^\mu}(H_{\omega\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \tfrac{1}{3}K_{\omega\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu})]_0\text{[9]}$$

$$(a \neq b)$$

$$(15,4)\qquad \left(\frac{\partial^3 x^\nu}{\partial y_a \partial y_a \partial y_b}\right)_0 =$$

$$= [\underset{aab}{\bar{e}^\nu} + H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}(\underset{b}{e^\lambda}\underset{aa}{\bar{e}^\mu} + 2\underset{a}{e^\lambda}\underset{ab}{\bar{e}^\mu}) + \underset{b}{e^\omega}\underset{a}{e^\mu}\underset{a}{e^\lambda}(H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \tfrac{2}{3}K_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu})]_0$$

---

[8]) Les indices latins prennent les valeurs 1, 2.

[9]) On a aussi

En substituant ces valeurs dans

$$x^{\nu} = \underset{0}{x^{\nu}} + \sum \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial^{p} x^{\nu}}{\partial y_{a_1} \dots \partial y_{a_p}} \right)_0 y_{a_1} \dots y_{a_p} \tag{16,1}$$

on obtient le développement cherché

$$\begin{aligned} x^{\nu} = \underset{0}{x^{\nu}} &+ \sum_{a} \overset{0}{\underset{a}{e^{\nu}}} y_a + \frac{1}{2!} \sum_{a,b} (\underset{ab}{\bar{e}^{\nu}} + \underset{a}{e^{\lambda}} \underset{b}{e^{\mu}} H_{\dot{\lambda}\dot{\mu}}{}^{\nu})_0 y_a y_b \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{a} (\underset{aaa}{\bar{e}^{\nu}} + 3 \underset{aa}{\bar{e}^{\lambda}} \underset{a}{e^{\mu}} H_{\dot{\lambda}\dot{\mu}}{}^{\nu} + \underset{a}{e^{\lambda}} \underset{a}{e^{\mu}} \underset{a}{e^{\omega}} H_{\dot{\omega}\dot{\lambda}\dot{\mu}}{}^{\nu})_0 y_a y_a y_a \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{a \neq b} 3 [\underset{baa}{\bar{e}^{\nu}} + H_{\dot{\lambda}\dot{\mu}}{}^{\nu} (2 \underset{ab}{\bar{e}^{\lambda}} \underset{a}{e^{\mu}} + \underset{aa}{\bar{e}^{\lambda}} \underset{b}{e^{\mu}}) + \underset{a}{e^{\omega}} \underset{b}{e^{\lambda}} \underset{a}{e^{\mu}} (H_{\dot{\omega}\dot{\lambda}\dot{\mu}}{}^{\nu} + \\ &+ \tfrac{1}{3} K_{\dot{\omega}\dot{\lambda}\dot{\mu}}{}^{\nu})]_0 y_a y_a y_b + \dots \end{aligned} \tag{16,2}$$

Si V_2 est géodésique en P, cette série se réduit à

$$\begin{aligned} x^{\nu} = \underset{0}{x^{\nu}} &+ \sum_{a} \overset{0}{\underset{a}{e^{\nu}}} y_a + \frac{1}{2!} \sum_{ab} (\underset{ab}{\bar{e}^{\nu}})_0 y_a y_b + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{a} (\underset{aaa}{\bar{e}^{\nu}} + \underset{a}{\bar{e}^{\lambda}} \underset{a}{\bar{e}^{\mu}} \underset{a}{\bar{e}^{\omega}} H_{\dot{\omega}\dot{\lambda}\dot{\mu}}{}^{\nu})_0 y_a y_a y_a \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{a \neq b} 3 [\underset{baa}{\bar{e}^{\nu}} + \underset{a}{e^{\omega}} \underset{b}{e^{\mu}} \underset{a}{e^{\lambda}} (H_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\nu} + \tfrac{1}{3} K_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\nu})]_0 y_a y_a y_b + \dots \end{aligned} \tag{16,3}$$

et si, de plus, V_n est à courbure constante

$$\begin{aligned} x^{\nu} = \underset{0}{x^{\nu}} &+ \sum_{a} \overset{0\nu}{\underset{a}{e}} y_a + \tfrac{1}{2} \sum_{a,b} (\underset{ab}{\bar{e}})_0 y_a y_b + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{a} (\underset{aaa}{\bar{e}^{\nu}})_0 y_a y_a y_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} (\underset{baa}{\bar{e}^{\nu}} + \tfrac{1}{3} \underset{a}{e^{\omega}} \underset{b}{e^{\mu}} \underset{a}{e^{\lambda}} K_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\nu})_0 y_a y_a y_b + \dots \end{aligned} \tag{10,4}$$

Prague, octobre 1926.

Sur les fonctions hyperharmoniques.

Par

Ladislas Nikliborc (Lwów).

Introduction.

Il serait inutile d'insister ici sur la portée de l'influence de la théorie des fonctions harmoniques sur le développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe. On sait en effet que l'étude d'une fonction d'une variable complexe est au fond équivalente à l'étude d'un système de deux fonctions harmoniques conjuguées de deux variables réelles.

Le cas des fonctions de deux variables complexes diffère profondément de celui des fonctions d'une seule variable complexe et voici comment M. Picard s'exprime à ce sujet[1]):

„On voit de suite la différence profonde qui doit séparer la théorie des fonctions de deux variables complexes de celle d'une variable. Dans celle-ci, la partie réelle P doit satisfaire à l'unique l'équation de Laplace; dans celle-là, au contraire, nous trouvons quatre équations pour cette seule partie réelle P. Il ne semble guère possible d'étudier ce système de quatre équations comme on a étudié l'équation de Laplace; aussi devrons-nous ici considérer la fonction $P + iQ$ dans son ensemble, sans étudier séparément P et Q".

Il n'est pas donc étonnant que, dans les travaux consacrés à la théorie des fonctions de deux variables complexes, on se soit servi jusqu'à présent presque exclusivement des grandeurs complexes en renonçant à la séparation des parties réelle et imaginaire; à notre connaissance, il n'existe qu'un seul mémoire où la séparation des parties réelle et imaginaire d'une fonction de deux va-

[1]) Traité d'Analyse. T. II. p. 257 (deuxième édit.).

riables complexes ait été employée avec succès et c'est le célèbre mémoire de Poincaré: „Sur les fonctions de deux variables“ [1]).

L'objet du présent mémoire consiste en l'étude des fonctions de quatre variables réelles x_1, y_1, x_2, y_2, susceptibles de représenter la partie réelle ou la partie imaginaire d'une fonction analytique de deux variables complexes $x_1 + iy_1$ et $x_2 + iy_2$. Ces fonctions se confondent avec celles qui vérifient le système suivant de quatre équations aux dérivées partielles:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0.
\end{aligned}
$$

On appelle le plus souvent [2]) les fonctions satisfaisant aux équations (1) „fonctions biharmoniques“, mais, comme en Physique mathématique, on donne le même nom aux intégrales de l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

(dite „l'équation biharmonique“), équation qu'on rencontre dans la théorie des plaques élastiques, nous donnerons aux fonctions qui vont nous occuper, c'est-à dire à celles qui vérifient le système (1), le nom de „fonctions hyper-harmoniques“.

Les principaux résultats du présent travail sont les suivants:

Dans le chapitre I, nous démontrons qu'on peut définir les fonctions hyperharmoniques, régulières dans un domaine déterminé, par la condition de satisfaire à un système de, trois seulement équations dont la forme en coordonnées hyperspheroïdales est particulièrement simple.

Dans le Chapitre IIme, nous étudions certains développements en série. Ces développements permettent de démontrer quelques

---

[1]) Acta Mathematica. T. II. 1883. p. 99 et T. XXII 1898, p. 112.

[2]) L. c. Aussi M. Osgood appelle les fonctions, qui nous occupent „fonctions biharmoniques“ dans son livre „Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. II. 1te Lieferung“.

théorèmes intéressants sur les classes des fonctions satisfaisant à certains systèmes d'équations

Le Chapitre III[me] est consacré à l'étude de l'intégrale de Poisson pour les fonctions hyperharmoniques et à l'étude du problème de Dirichtet pour ces fonctions. On peut ici poser le problème de Dirichtet de deux manières différentes, en définissant les conditions aux limites soit sur une multiplicité à deux, soit sur une multiplicité à trois dimensions. Mais il se trouve, que dans aucun cas on ne peut se donner les conditions limites d'une façon tout à fait arbitraire. En réalité ces conditions doivent s'exprimer par des fonctions appartenant à une classe spéciale de fonctions, classe qui est définie pour chaque domaine déterminé par une infinité de relations auxquelles les fonctions de cette classe doivent satisfaire. La solution du problème de Dirichtet est traité ici dans un cas particulièrement simple et nous réservons l'étude des cas plus généraux pour un mémoire ultérieur.

Ajoutons que quelques-uns des résultats exposés dans ce mémoire ont fait l'objet de deux notes insérées dans les „Comptes rendus" [1]).

En terminant cette introduction, je tiens à exprimer mes plus vifs remercîments à M. le Professeur S. Zaremba pour les observations qu'il a eu la bonté de me faire après avoir pris connaissance de mon travail et dont j'ai tiré grand parti pour la rédaction définitive de ce mémoire.

CHAPITRE I.

Les équations $\Delta_\varkappa u = 0$.

§ 1. **Définitions et notations.** Soit (T) un domaine, situé dans l'espace à quatre dimensions des variables x_1, y_1, x_2, y_2. En posant

$$z_\varkappa = x_\varkappa + iy_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

envisageons une fonction $f(z_1, z_2)$ holomorphe dans (T).

La partie réelle $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ et de même la partie imagi-

---

[1]) „Sur les fonctions hyperharmoniques". T. 180, p. 1008. 1925, et T. 182 p. 110. 1926.

naire $v(x_1, y_1, x_2, y_2)$ de la fonction $f(z_1, z_2)$ ne sont pas indépendantes et on sait qu'elles sont liées par les quatre équations

$$\frac{\partial u}{\partial x_\varkappa} = \frac{\partial v}{\partial y_\varkappa}$$

(1) $$\frac{\partial u}{\partial y_\varkappa} = -\frac{\partial u}{\partial x_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

bien connues sous le nom d'„équations de Cauchy-Riemann“[1]).

Il suit de là que la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$, [et de même la fonction v] doit satisfaire à quatre équations[2]):

$$\Delta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0$$

(2) $$\Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$$

$$\Delta_4 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0,$$

que nous appellerons „équations de Laplace“.

En dehors des équations (2), nous aurons à considérer l'équation

(3) $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0,$$

que nous appellerons „équation complète de Laplace“.

Voici les définitions des trois classes des fonctions que nous allons étudier dans ce mémoire:

„Si la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ est définie et continue avec ses dérivées partielles du premier ordre à l'intérieur du domaine (T), si de plus les dérivées partielles du deuxième ordre dans ce domaine existent, nous disons que cette fonction est

1° **harmonique** dans (T) si

$$\Delta u = 0$$

2° **doublement harmonique** dans (T) si

---

1) Picard. Traité d'Analyse. Tome II. Deuxième éd. p. 255.

2) Picard. L. c.

$$\Delta_1 u = 0$$
$$\Delta_2 u = 0,$$

3° **hyperharmonique** dans (T) si elle satisfait au système (2) des équations".

On voit immédiatement que toute fonction doublement harmonique dans un domaine est aussi harmonique est de même, que toute fonction hyperharmonique dans un domaine est aussi doublement harmonique et alors „a fortiori" harmonique dans ce domaine.

En vertu des ces remarques, des définitions adoptées et d'un théorème de M. Wilkosz[1]), on peut affirmer que les fonctions qui appartiennent à l'une quelconque des classes précédentes, jouissent de la propriété d'avoir des dérivées partielles du deuxième ordre continues. Il suit de là que les fonctions qui nous occupent, possèdent des dérivées partielles continues de tous les ordres.

§ 2. **Les équations** $\Delta_\varkappa u = f_\varkappa$.

Envisageons le système d'équations

$$\Delta_\varkappa u = f_\varkappa(x_1, y_1, x_2, y_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

où les fonctions sont continues avec leurs dérivées partielles à l'intérieur du domaine (T).

Existe-t-il du moins une fonction u, qui satisfasse au système (3)?

Evidemment non et il est très facile d'établir des conditions nécessaires pour qu'une telle fonction existe. Laissons cette question de côté et en supposant que l'on ait identiquement

$$(4) \qquad f_\varkappa = c_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

où les $c_\varkappa$ représentent des constantes, envisageons les équations

$$(5) \qquad \Delta_\varkappa u = c_\varkappa. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

Il est très facile de voir que les conditions de compatibilité des équations (5) sont remplies.

§ 3. **Les équations** $\Delta_\varkappa u = c_\varkappa$.

Nous allons établir dans ce paragraphe quelques théorèmes intéressants sur le système (5). Notons que les démonstrations directes,

---

[1]) C. R, T. 174. (1922 I). p. 435.

exposées dans ce § sont dues à mon Collègue M. H. Äuerbach; celles que j'avais données d'abord ayant été basées sur les théorèmes du IIIme Chapitre [1]) de ce mémoire.

Théorème: „Si la fonction u satisfait aux équations

$$\Delta_1 u = c_1,\ \Delta_2 u = c_2,\ \Delta_3 u = c_3,$$

il existe une constante c_4, telle qu'on ait

$$\Delta_4 u = c_4.\text{“}$$

Dém. En effet, toute fonction $u(x, y_1\, x_2\, y_2)$ vérifie identiquement les relations

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_4 u = \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1 u - \frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_3 u$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_4 u = \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_3 u - \frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_2 u$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_4 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_3 u - \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_1 u$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_4 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_2 u - \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_3 u,$$

dont notre théorème est une conséquence immédiate.

Corollaire: „A toute fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ satisfaisant au système

(6) $$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \Delta_3 u = 0$$

correspond une infinité de systèmes de deux constantes α et β telles que la fonction

(7) $$v = u + \alpha x_1 y_2 + \beta y_1 x_2$$

soit hyperharmonique“.

Dém. D'après un théorème déjà demontré, les équations (6) entraînent la suivante

$$\Delta_4 u = c_4.$$

Il s'ensuit donc que si les constantes α et β satisfont à l'équation

$$\alpha + \beta + c_4 = 0,$$

[1]) V. la première de mes notes citées plus haut.

la fonction v, définie par (7), sera une fonction hyperharmonique.

Remarquons que les équations (6) n'entraînent pas l'équation $\Delta_4 u = 0$, comme le prouve l'exemple $u = 2x_1y_2 - y_1x_2$.

D'une manière analogue on peut démontrer le théorème suivant:

„Les équations

$$\Delta_1 u = c_1,\ \Delta_2 u = c_2,\ \Delta_4 u = c_4,$$

entraînent l'équation

$$\Delta_3 u = c_3."$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est le suivant:

„Pour toute fonction u qui satisfait au système

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \Delta_4 u = 0,$$

il existe un couple de nombres réels α, β, tel que la fonction

$$v = u + \alpha x_1 x_2 + \beta y_1 y_2$$

soit une fonction hyperharmonique".

§ 4. Les équations $\bar{\nabla}_\varkappa u = 0$.

Envisageons maintenant les deux équations

$$(8)\qquad \begin{aligned} \bar{\nabla}_1 u &= (x_1x_2 + y_1y_2)\,\Delta_3 u + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\Delta_4 u = 0 \\ \bar{\nabla}_2 u &= (x_1y_2 - y_1x_2)\,\Delta_3 u - (x_1x_2 + y_1y_2)\,\Delta_4 u = 0 \end{aligned}$$

que nous appellerons „équations de Laplace transformées".

Il est évident que toute l'intégrale des équations $\Delta_3 u = 0$ et $\Delta_4 u = 0$ est aussi l'intégrale des équations $\bar{\nabla}_1 u = 0$ et $\bar{\nabla}_2 u = 0$. La réciproque reste vraie, car on peut considérer les équations (8) comme les équations linéaires en $\Delta_3 u$ et $\Delta_4 u$, dont le déterminant est égal à l'expression

$$(x_1^2 + y_1^2)\,(x_2^2 + y_2^2)$$

Il suit de là que pour qu'une fonction $u(x_1, y_1, x_2 . y_2)$ soit dans (T) hyperharmonique, il faut et il suffit qu'elle satisfasse au système

$$\Delta_1 u = 0,\ \Delta_2 u = 0,\ \bar{\nabla}_1 u = 0,\ \bar{\nabla}_2 u = 0.$$

Mais l'importance des équations (9), qui peuvent servir de définition aux fonctions hyperharmoniques, est beaucoup plus grande. Elle consiste en ce que dans le cas des fonctions régulières, le système (9) peut être réduit à un système de trois équations seulement.

C'est la première proposition fondamentale du notre travail; elle peut être énoncée comme il suit:

„Si le point $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ est situé à l'intérieur du domaine (T) et si la fonction $u(x_1\, y_1, x_2\, y_2)$ étant continue avec ses dérivées partielles des deux premiers ordres[1]), satisfait à l'un des systèmes d'équations

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \overline{\nabla}_1 u = 0$$

ou

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \overline{\nabla}_2 u = 0,$$

elle est nécessairement hyperharmonique".

La démonstration est très simple. Supposons, par exemple, que les équations $\Delta_1 u = \Delta_2 u = \overline{\nabla}_1 u = 0$ soient satisfaites et partons des identités suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{\nabla}_2 u = y_2 \Delta_3 u - x_2 \Delta_4 u + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_3 u - (x_1 x_2 + y_1 y_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_4 u$$

$$\text{(9)}\qquad \frac{\partial}{\partial y_1}\overline{\nabla}_1 u = y_2 \Delta_3 u - x_2 \Delta_4 u + (x_1 x_2 - y_1 y_2)\frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_3 u + {} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_3 u = 0.$$

Elles nous donneront

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{\nabla}_2 u = -(x_1\, x_2 + y_1\, y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1 u + (x_1 y_2 - y_2 x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_1 u.$$

D'un façon analogue on trouvera

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\overline{\nabla}_2 u = \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{\nabla}_2 u = \frac{\partial}{\partial y_2}\overline{\nabla}_2 u = 0.$$

---

[1]) La supposition de la continuité des dérivées du 2me ordre n'est pas nécessaire, comme on le voit en s'appuyant sur le théorème cité de M. Wilkosz.

Donc dans tout le domaine (T) $\bar{\nabla}_2 u =$ const. et comme

$$\bar{\nabla}_2 u \Big/_{\substack{x_1=0\\y_1=0\\x_2=0\\y_2=0}} = 0$$

on a identiquement

$$\bar{\nabla}_2 u = 0.$$

On démontre d'une façon analogue la deuxième partie du théorème.

Remarque: L'hypothèse que le point $(x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0)$ est à l'intérieur du domaine de régularité de la fonction u, est essentielle, comme nous le démontrerons plus tard.

§ 5. **Les fonctions doublement harmoniques.** Nous savons déjà qu'une fonction doublement harmonique n'est pas en général fonction hyperharmonique. Cependant on peut trouver deux fonctions hyperharmoniques étroitement liées à la fonction u.

En effet, d'après les formules (9), on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{\nabla}_2 u &= \frac{\partial}{\partial y_1}\bar{\nabla}_1 u\\
\frac{\partial}{\partial y_1}\bar{\nabla}_2 u &= -\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{\nabla}_1 u\\
\frac{\partial}{\partial x_2}\bar{\nabla}_2 u &= -\frac{\partial}{\partial y_2}\bar{\nabla}_1 u\\
\frac{\partial}{\partial y_2}\bar{\nabla}_2 u &= \frac{\partial}{\partial x_2}\bar{\nabla}_1 u.
\end{aligned}$$

Il suit de là que

$$\Delta_j(\bar{\nabla}_\varkappa u) = 0 \qquad \begin{matrix}(j = 1, 2, 3, 4)\\(\varkappa = 1, 2).\end{matrix}$$

On a donc le

théorème „La fonction

$$\varphi(z_1, \bar{z}_2) = \bar{\nabla}_2 u + i\bar{\nabla}_1 u,$$

où $\bar{z}_2 = y_2 + ix_2$, est analytique régulière“.

§ 6. **Coordonnées hypersphéroïdales.** Introduisons maintenant de nouvelles coordonnées $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$, c. à d. les quantités liées à x_1, y_1, x_2, y_2 par les relations

$$x_\varkappa + i y_\varkappa = r_\varkappa e^{i\varphi_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2).$$

Nous appellerons ces nouvelles coordonnées: „coordonnés hypersphéroïdales".

Par un calcul direct on trouve facilement des expressions pour $\Delta_\varkappa u$ en coordonnées $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$. On a

$$\begin{aligned} \Delta_\varkappa u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r_\varkappa^2} + \frac{1}{r_\varkappa} \cdot \frac{\partial u}{\partial r_\varkappa} + \frac{1}{r_\varkappa^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_\varkappa^2} \qquad (\varkappa = 1, 2) \\ \Delta_3 u &= \nabla_1 u \,.\, \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \nabla_2 u \;\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \Delta_4 u &= \nabla_1 u \,.\, \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \nabla_2 u \,.\, \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \tag{10}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \nabla_1 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r_1 \partial r_2} + \frac{1}{r_1 r_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \nabla_2 u &= \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_1 \partial r_2} - \frac{1}{r_2} \frac{\partial^2 u}{\partial r_1 \partial \varphi_2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Les expressions en coordonnées $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$ pour $\bar{\nabla}_1 u$, $\bar{\nabla}_2 u$ s'obtiennent facilement et l'on a

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_1 u &= r_1 r_2 \nabla_1 u \\ \bar{\nabla}_2 u &= r_1 r_2 \nabla_2 u. \end{aligned} \tag{12}$$

D'après les résultats du § 5[me], le système

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \nabla_1 u = \nabla_2 u = 0 \tag{13}$$

est complètement équivalent au système (2) et il peut de même être réduit à un des systèmes

$$\begin{aligned} &\Delta_1 u = 0,\ \Delta_2 u = 0,\ \nabla_1 u = 0 \\ &\Delta_1 u = 0,\ \Delta_2 u = 0,\ \nabla_2 u = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

sous la condition que la fonction u soit régulière à l'origine.

§ 7. **Les équations $\bar{\nabla}_1 u = 0$ et $\bar{\nabla}_2 u = 0$.** Nous terminerons ce chapitre en démontrant la proposition suivante:

„Si la fonction $u(x_1\, y_1\, x_2\, y_2)$ est continue avec ses

dérivées partielles des trois premiers ordres à l'intérieur du domaine (T) comprenant l'origine et si

$$\bar{\nabla}_1 u = 0$$
$$\bar{\nabla}_2 u = 0,$$

alors on peut déterminer deux fonctions

$$f_1(x_1\, y_1),\ f_2(x_2\, y_2)$$

telles que la fonction

$$u(x_1, y_1, x_2, y_2) - f_1(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2)$$

soit hyperharmonique dans (T)".

Dém. En effet[1]) cherchons s'il est possible de trouver une fonction (15) satisfaisant aux équations

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \bar{\nabla}_1 u = \bar{\nabla}_2 u = 0.$$

Or on voit d'après l'hypothése qu'on a certainement

$$\bar{\nabla}_1(u - f_1 - f_2) = 0$$
$$\bar{\nabla}_2(u - f_1 - f_2) = 0,$$

les fonctions $f_1(x_1\, y_1)$ et $f_2(x_2, y_2)$ étant absolument quelconques et assujetties seulement à avoir des dérivées partielles des deux premiers ordres.

Il nous reste alors à montrer qu'on peut satisfaire aux équations

$$\Delta_1(u - f_1) = 0$$
$$\Delta_2(u - f_2) = 0.$$

A cet effet observons que les expressions $\Delta_1 u$ et $\Delta_2 u$ sont des fonctions bien définies et continues dans (T) et qu'elles possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues. Calculons les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_1 u$ et $\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1 u$. On trouve immédiatement qu'on a

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta_1 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_3 u - \frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_4 u = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta_1 u = \frac{\partial}{\partial y_1}\Delta_3 u + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_4 u = 0.$$

---

[1]) Je dois cette démonstration à M. Zaremba; ma démonstration primitive était basée sur les développements employés dans le IIme Chapitre; voir pour cela la deuxième de mes notes citée plus haut.

L'expression $\Delta_1 u$ est donc une fonction qui dépend seulement des variables (x_1, y_1) et on prouve d'une manière analogue que $\Delta_2 u$ dépend seulement des variables (x_2, y_2).

Posons

$$\Delta_\varkappa u = \varphi_\varkappa(x_\varkappa, y_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

et envisageons des équations

$$\Delta_\varkappa f_\varkappa(x_\varkappa, y_\varkappa) = \varphi_\varkappa(x_\varkappa, y_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2).$$

On peut évidemment intégrer ces équations[1]) et on voit que des fonctions $f_1(x_1, y_1)$ et $f_2(x_2, y_2)$ déterminées par ce procédé nous fournissent la solution du problème.

Remarque. On peut encore se demander si les fonctions $f_1(x_1\, y_1)$ et $f_2(x_2\, y_2)$ sont entièrement déterminées. Evidemment non, car en désignant par $H_1(x_1, y_1)$ et $H_2(x_2, y_2)$ des fonctions harmoniques quelconques, on voit que l'expression

$$u - (f_1 + H_1) - (f_2 + H_2)$$

est aussi une fonction hyperharmonique.

Mais on peut aussi démontrer la réciproque.

Si nous avions

$$u - f_1(x_1\, y_1) - f_2(x_2\, y_2) = v$$
$$u - \varphi_1(x_1, y_1) - \varphi_2(x_2, y_2) = w,$$

où v et w désigneraient des fonctions hyperharmoniques, nous aurions

$$(\varphi_1 - f_1) + (\varphi_2 - f_2) = v - w,$$

donc

$$\Delta_1(v - w) = \Delta_1(\varphi_1 - f_1) = 0$$
$$\Delta_2(v - w) = \Delta_2(\varphi_2 - f_2) = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

---

[1]) Voir p e. Goursat. Cours d'Analyse. T. III. 2[me] éd. p. 227 et suiv.

CHAPITRE II.

Développements en séries.

§ 1. Développement d'une fonction harmonique.

Envisageons la fonction $f(r_1, \varphi_1)$ harmonique dans la couronne circulaire définie par des inégalités

$$R' < r < R.$$

On démontre, dans la théorie du potentiel logarithmique, qu'une telle fonction peut être mise sous la forme d'une série

$$(1) \quad f(r, \varphi) = c \log r + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \{(a_\varkappa r^\varkappa + a_{-\varkappa} r^{-\varkappa}) \cos \varkappa\varphi + (b_\varkappa r^\varkappa + b_{-\varkappa} r^{-\varkappa}) \sin \varkappa\varphi\},$$

où les $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, c représentent des constantes. La série (1) converge uniformément dans tout domaine fermé situé entièrement à l'intérieur de la couronne circulaire considérée.

Réciproquement, la série (1) supposée uniformément convergente, représente une fonction harmonique à l'intérieur du domaine de convergence.

Nous allons montrer ici que la fonction $f(r, \varphi)$ peut être mise aussi sous la forme suivante:

$$f(r, \varphi) = c \log r + \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} (a_\varkappa \cos \varkappa\varphi + b_\varkappa \sin \varkappa\varphi) r^\varkappa.$$

Soient r_1 et r_2 deux nombres positifs

$$R' < r_2 < r_1 < R.$$

Il existe évidemment un nombre positif M tel qu'on a

$$\left.\begin{array}{l} | A_\varkappa(\varphi) r_1^\varkappa + A_{-\varkappa}(\varphi) r_1^{-\varkappa} | < M \\ | A_\varkappa(\varphi) r_2^\varkappa + A_{-\varkappa}(\varphi) r_2^{-\varkappa} | < M \end{array}\right\} \quad (\varkappa = 1. 2, \ldots),$$

où l'ou a posé

$$A_\varkappa(\varphi) = a_\varkappa \cos \varkappa\varphi + b_\varkappa \sin \varkappa\varphi \quad (\varkappa = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On obtient donc immédiatement des inégalités

$$\left.\begin{aligned} |A_\varkappa(\varphi)| &< \frac{M}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa} \\ |A_{-\varkappa}(\varphi)| &< \frac{M.r_1^\varkappa.r_2^\varkappa}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

d'où on tire les relations:

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} |a_\varkappa| &< \frac{M}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa}, & |b_\varkappa| &< \frac{M}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa} \\ |a_{-\varkappa}| &< \frac{Mr_1^\varkappa r_2^\varkappa}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa}, & |b_{-\varkappa}| &< \frac{Mr_1^\varkappa r_2^\varkappa}{r_1^\varkappa - r_2^\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

Il suit de ce qui précède que la série

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \{ |a_\varkappa| + |b_\varkappa| \} r^\varkappa,$$

(dont la convergence pour $r < r_1$ peut être prouvée directement en vertu des relations (2)) est une majorante pour la série

$$\sum_{\varkappa=1}^{+\infty} A_\varkappa(\varphi) r^\varkappa.$$

On peut démontrer de la même façon la convergence de la série

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} A_{-\varkappa}(\varphi) r^{-\varkappa}$$

pour les $r > r_2$. C. q. f. d.

§ 2. **Développement d'une fonction doublement harmonique.** Considérons maintenant l'hypersphéroïde (T_H), c. à d. l'ensemble des points $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ où

$$\begin{aligned} r_1 &\leqq R_1 \\ r_2 &\leqq R_2. \end{aligned}$$

Les nombres R_1 et R_2 porteront le nom de „rayons du hypersphéroïde".

Envisageons maintenant deux hypersphéroïdes $(T_H^{(1)})$ et $(T_H^{(2)})$ et soient $(R_1^{(1)}, R_2^{(1)})$, respectivement $(R_1^{(2)}, R_2^{(2)})$, leurs rayons. L'ensemble des points communs aux $(T_H^{(1)})$ et $(T_H^{(2)})$ forme un domaine que nous appellerons „couronne hypersphéroïdale" (C_H).

Soit maintenant $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ une fonction, supposée être doublement harmonique à l'intérieur du (C_H). En se basant sur les considérations du numéro précédent, on démontre facilement la formule

$$(3)\qquad u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} [a_{mn}^{(1)} \cos m\varphi_1 \,.\, \cos n\varphi_2 + $$
$$+ a_{mn}^{(2)} \cos m\varphi_1 \sin n\varphi_2 + a_{mn}^{(3)} \sin m\varphi_1 \cos n\varphi_2 + a_{mn}^{(4)} \sin m\varphi_1 \sin n\varphi_2],$$

où l'on a

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_{0,0}^{(1)} = \alpha_{0,0}^{(1)} + \beta_{0,0}^{(1)} \log r_1 + \gamma_{0,0}^{(1)} \log r_2 + \delta_{0,0}^{(1)} \log r_1 \,.\, \log r_2 \\
a_{0,0}^{(i)} = 0 \qquad (i = 2, 3, 4) \\
a_{m,0}^{(i)} = [\alpha_{m,0}^{(i)} + \beta_{m,0}^{(i)} \log r_2] r_1^m + [\gamma_{m,0}^{(i)} + \delta_{m,0}^{(i)} \log r_2] r_1^{-m} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } i = 1, 3 \text{ et } m > 0 \\
a_{m,0}^{(i)} = 0 \qquad \text{pour } i = 2, 4 \text{ et } m > 0 \\
a_{0,n}^{(i)} = [\alpha_{0,n}^{(i)} + \beta_{0,n}^{(i)} \log r_1] r_2^n + [\gamma_{0,n}^{(i)} + \delta_{0,n}^{(i)} \log r_1] r_2^{-n} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } n > 0 \\
a_{0,n}^{(i)} = 0 \qquad \text{pour } i = 3, 4 \text{ et } n > 0 \\
a_{m,n}^{(i)} = \alpha_{m,n}^{(i)} r_1^m r_2^n + \beta_{m,n}^{(i)} \,.\, r_1^m \,.\, r_2^{-n} + \gamma_{m,n}^{(i)} r_1^{-m} r_2^n + \delta_{m,n}^{(i)} r_1^{-m} r_2^{-n} \\
\qquad\qquad\qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } m > 0,\ n > 0.
\end{array}\right.$$

Les lettres $\alpha_{m,n}^{(i)}, \beta_{m,n}^{(i)}, \ldots$ représentent des constantes. En effet, pour la démonstration, il suffit de considérer (r_2, φ_2) comme les constantes et de développer la fouction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ en une série de la forme (1). Les $a_\varkappa, b_\varkappa, c$ seront naturellement des fonctions des variables r_2, φ_2 et il est facile de voir que ces fonctions seront harmoniques en r_2, φ_2. En développant à nouveau les $a_\varkappa, b_\varkappa, c$ de la même manière, on parvient à la formule (3), avec les expressions (4) pour les $a_{m,n}^{(i)}$.

Ajoutons que la série (3) converge dans (C_H), la convergence étant uniforme dans tout domaine fermé, situé entièrement à l'intérieur du (C_H).

Réciproquement, si la série (3), avec les expressions (4) pour les $a_{m,n}^{(i)}$, converge uniformément à l'intérieur du (C_H), elle représente une fonction doublement harmonique à l'intérieur du (C_H).

On peut aussi, en s'appuyant sur la remarque faite à la fin du numéro précédent, démontrer que

„toute fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ doublement harmonique à l'intérieur d'une couronne hypersphéroïdale, peut être développée en une série

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = A_{0\cdot 0} \log r_1 \log r_2 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A'_{m,0}(\varphi_1, \varphi_1) \cdot r_1^m \log r_2 +$$

(5)

$$+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_{0,n}(\varphi_1, \varphi_2) r_2^n \log r_1 + \sum_{m=-+}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A''_{m,n}(\varphi_1, \varphi_2) \cdot r_1^m r_2^n$$

où les $A_{m,n}(\varphi_1, \varphi_2)$ s'expriment simplement par les fonctions $\cos m\varphi_1$, $\cos n\varphi_2$, $\sin m\varphi_1$, $\sin n\varphi_2$.

§ 3. Singularités des fonctions doublement harmoniques.

On sait qu'une fonction harmonique peut avoir des singularités isolées et cette propriété est de la plus grande importance pour la théorie du potentiel.

Il en est tout autrement des fonctions doublement harmoniques et „a fortiori" des fonctions hyperharmoniques et c'est de là que dérive peut-être la différence la plus essentielle entre la théorie des fonctions d'une variable complexe et celle des fonctions de plusieurs variables complexes.

En effet, je dis que les singularités des fonctions doublement harmoniques ne sont jamais isolées.

Pour la démonstration revenons aux considérations du § 2me du texte.

Supposons que la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ soit doublement harmonique dans le voisinage du point $(0, 0, 0, 0)$, en ne supposant rien au sujet des circonstances qui se présentent au point $(0, 0, 0, 0)$ lui-même. En introduisant des coordonnées hypersphéroïdales, nous supposons donc que la fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ est doublement harmonique pour tous les points $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ où r_1 et r_2 sont suffisamment petits et $r_1^2 + r_2^2 > 0$.

On voit donc, en employant les notations du § 2me que les coefficients $a_{m,n}^{(i)}$ sont des fonctions régulières de r_1 et r_2 pour tout couple des valeurs (r_1, r_2) positives et suffisamment petites, à l'exception du couple $r_1 = r_2 = 0$.

Distinguons plusieurs cas:

I. $m > 0$, $n > 0$. On a dans ce cas:

$$a_{m,n}^{(i)} = [\alpha_{m,n}^{(i)} r_2^n + \beta_{m,n}^{(i)} r_2^{-n}] r_1^m + [\gamma_{m,n}^{(i)} r_2^n + \delta_{m,n}^{(i)} r_2^{-m}] r_1^{-m}.$$

Prenons un couple $(r_1 \neq 0, r_2 = 0)$. La fonction $a_{m,n}^{(i)}$ est pour ce couple régulière, ce qui est possible seulement si

$$\gamma^{(i)}_{m,n} r_2^n + \delta^{(i)}_{m,n} r_2^{-n} = 0,$$

et alors si

$$\gamma^{(i)}_{m\,n} = 0$$
$$\delta^{(i)}_{m,n} = 0.$$

L'expression pour $a^{(i)}_{m,n}$ doit donc se réduire à l'expression suivante

$$a^{(i)}_{m,n} = \alpha^{(i)}_{m,n} r_1^m r_2^n + \beta^{(i)}_{m,n} r_1^m r_2^{-n}.$$

Prenons maintenant un point $(r_1 = 0.\ r_2 \neq 0)$. La fonction $a^{(i)}_{m,n}$ est, d'après ce qu'on a vu plus haut, régulière dans ce point et alors on doit avoir aussi $\beta^{(i)}_{m,n} = 0$.

Nous voyons donc que, dans le cas considéré, on doit avoir

$$a^{(i)}_{m,n} = \alpha^{(i)}_{m,n} r_1^m r_2^n \qquad (i = 1, 2, 3, 4, m > 0 \quad n > 0),$$

II. On démontre, par une voie analogue, qu'on a

$$a^{(i)}_{m,n} = \alpha^{(i)}_{m,0} r_1^m \qquad \text{pour } i = 1,3 \text{ et } m > 0$$
$$a^{(i)}_{0,n} = \alpha^{(i)}_{0,n} r_2^n \qquad \text{pour } i = 1,2 \text{ et } n > 0$$
$$a^{(i)}_{0,0} = \alpha_{0,0} \qquad \text{pour } i = 1.$$

Le développement (5) devient donc simplifié et on obtient la formule

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(\varphi_1, \varphi_2) r^m r_2^n,$$

qui converge pour $r_1 = r_2 = 0$.

Nous voyons donc qu'on peut attribuer à notre fonction u pour $r_1 = r_2 = 0$ une valeur telle que la fonction u sera régulière au point $(r_1 = r_2 = 0)$ lui même. C. q. f. d.

§ 4. **Fonctions doublement harmoniques et l'équation** $\nabla_1 u = 0$. Supposons maintenant que la fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ satisfasse à l'intérieur du (C_H) au système des équations

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \nabla_1 u = 0. \tag{6}$$

Le développement (3) avec les formules (4) pour les coefficients $a^{(i)}_{m,n}$ est naturellement valable, mais on peut se demander si la

condition $\nabla_1 u = 0$ ne nous permettrait pas de simplifier des formules. Or on peut „a priori“ affirmer que la réponse doit être affirmative, parce qu'il existe des fonctions doublement harmoniques qui ne satisfont pas à l'équation $\nabla_1 u = 0$.

Cherchons donc l'expression générale pour les fonctions satisfaisant au système (6) et, comme point de départ, prenons les formules (3) et (4).

En posant

$$u_{mn} = a^{(1)}_{mn} \cos m\varphi_1 \cos n\varphi_2 + a^{(2)}_{m,n} \cos m\varphi_1 \sin n\varphi_2 + \\ + a^{(3)}_{m,n} \sin m\varphi_1 \cos n\varphi_2 + a^{(4)}_{m,n} \sin m\varphi_1 \sin n\varphi_2,$$

on voit que

$$\nabla_1 u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \nabla_1 u_{m,n},$$

et la somme double étant une série de Fourier, la condition $\nabla_1 u = 0$ est équivalente au système des conditions

$$\nabla_1 u_{m,n} = 0, \qquad (m,n = 0, 1, \ldots\ldots).$$

Nous avons à distinguer quatre cas.

Cas I: $m > 0$, $n > 0$.

On a

$$\nabla_1 u_{m,n} = \Phi^{(1)}_{m,n}[a^{(1)}_{m,n}, a^{(4)}_{m,n}] \cos m\varphi_1 \cos n\varphi_2 + \\ + \Phi^{(2)}_{m,n}[a^{(2)}_{m,n}, a^{(3)}_{m,n}] \cos m\varphi_1 . \sin n\varphi_2 + \\ + \Phi^{(2)}_{m,n}[a^{(3)}_{m,n}, a^{(2)}_{m,n}] \sin m\varphi_1 . \cos n\varphi_2 + \\ + \Phi^{(1)}_{m,n}[a^{(4)}_{m,n}, a^{(1)}_{m,n}] \sin m\varphi_1 . \sin n\varphi_2,$$

où on a posé :

$$\Phi^{(1)}_{m,n}[A, B] = \frac{\partial^2 A}{\partial r_1 \partial r_2} + \frac{mn}{r_1 r_2} B$$

$$\Phi^{(2)}_{m,n}[A, B] = \frac{\partial^2 A}{\partial r_1 \partial r_2} - \frac{mn}{r_1 r_2} . B.$$

On doit donc avoir

$$(7) \quad \begin{cases} \Phi^{(1)}_{m,n}[a^{(i)}_{m,n}, a^{(j)}_{m,n}] = 0 & (i,j = 1, 4 \; i \neq j) \\ \Phi^{(2)}_{m,n}[a^{(i)}_{m,n}, a^{(j)}_{m,n}] = 0 & (i,j = 2, 3, \; i \neq j). \end{cases}$$

En substituant les expressions (4) pour les $a^{(i)}_{m,n}$ et ${}^{(j)}_{m,n}$ dans (7) on voit, que des constantes $a^{(i)}_{m,n},\ldots$ doivent être assujeties aux conditions

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha^{(1)}_{m,n} + \alpha^{(4)}_{m,n} = 0 \\ \beta^{(1)}_{m,n} - \beta^{(4)}_{m,n} = 0 \\ \gamma^{(1)}_{m,n} - \gamma^{(4)}_{m,n} = 0 \\ \delta^{(1)}_{m,n} + \delta^{(4)}_{m,n} = 0 \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha^{(2)}_{m,n} - \alpha^{(3)}_{m,n} = 0 \\ \beta^{(2)}_{m,n} + \beta^{(3)}_{m,n} = 0 \\ \gamma^{(2)}_{m,n} + \gamma^{(3)}_{m,n} = 0 \\ \delta^{(2)}_{m,n} - \delta^{(4)}_{m,n} = 0, \end{cases}$$

ce qui entraîne, que la formule pour $u_{m,n}$ peut être mise dans ce cas sous la forme suivante:

$$(9)\qquad \begin{aligned} u_{m,n} = {} & [\alpha^{(1)}_{m,n} r_1^m r_2^n + \delta^{(1)}_{m,n} r_1^{-m} r_2^{-n}] \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \\ & + [\beta^{(1)}_{m,n} r_1^m r_2^{-n} + \gamma^{(1)}_{m,n} r_1^{-m} r_2^n] \cos(m\varphi_1 - n\varphi_2) + \\ & + [\alpha^{(2)}_{m,n} r_1^m r_2^n + \delta^{(2)}_{m,n} r_1^{-m} r_2^{-n}] \sin(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \\ & + [\beta^{(2)}_{m,n} r_1^m r_2^{-u} + \delta^{(2)}_{m,n} r_1^{-m} r_2^n] \sin(m\varphi_1 - n\varphi_2). \quad (m,n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Cas II: $m > 0$, $n = 0$. On a

$$\nabla_1 u_{m,0} = \frac{\partial^2 a^{(1)}_{m,0}}{\partial r_1 \partial r_2} \cos m\varphi_1 + \frac{\partial^2 a^{(3)}_{m.0}}{\partial r_1 \partial r_2} \sin m\varphi_1.$$

Donc les $a^{(i)}_{m,0}$ doivent pour $i = 1, 3$ et $m > 0$ remplir l'équation

$$\frac{\partial^2 a^{(i)}_{m.0}}{\partial r_1 \partial r_2} = 0,$$

ce qui entraîne, qu'on a

$$a^{(i)}_{m,0} = \alpha^{(i)}_{m,0} r_1^m + \gamma^{(i)}_{m,0} r_1^{-m} \qquad (i = 1, 3)$$

et alors

$$(10)\quad u_{m,0} = [\alpha^{(1)}_{m,0} r_1^m + \gamma^{(1)}_{m,0} r_1^{-m}] \cos m\varphi_1 + [\alpha^{(3)}_{m,0} r_1^m + \gamma^{(3)}_{m,0} r_1^{-m}] \sin m\varphi_1.$$

Cas III. $m = 0$, $n > 0$. On trouve, que

$$(11)\quad u_{0,n} = [\alpha^{(1)}_{0,n} r_2^n + \gamma^{(1)}_{0,n} r_2^{-n}] \cos n\varphi_2 + [\alpha^{(2)}_{0,n} r_2^n + \gamma^{(2)}_{0,n} r_2^{-n}] \sin n\varphi_2.$$

Cas IV. $m = 0$, $n = 0$, On trouve facilement, que

$$(12)\qquad u_{0,0} = \alpha^{(1)}_{0,0} + \beta^{(1)}_{0,0} \log r_1 + \gamma^{(1)}_{0,0} \log r_2.$$

R é c i p r o q u e m e n t supposons, que la série

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$$

est uniformément convergente dans la couronne hypersphéroïdale, et que les $u_{m,n}$ sont définis par les formules (9)—(12). D'après § 2[me] la fonction u est doublement harmonique, elle possède alors des derivées partielles de tous les ordres, donc on peut écrire la relation

$$\nabla_1 u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \nabla_1 u_{m,n},$$

et comme $\nabla_1 u_{m,n} = 0$ (ce qu'on vérifie immédiatement), on a aussi $\nabla_1 u = 0$.

§ 5. **Les fonctions doublement harmoniques et l'équation** $\nabla_2 u = 0$. Passons maintenant au cas, ou la fonction u, supposée doublement harmonique dans la couronne (C_H), satisfait encore à l'équation $\nabla_2 u = 0$. Par des considérations tout à fait semblables à celles du paragraphe précédent, ou trouve, que le développement de la fonction u est donné par la formule

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}, \tag{13}$$

où les expressions pour les $u_{m,n}$ sont dans le cas $m^2 + n^2 > 0$ précisement les mêmes, lesquelles nous avons trouvées plus haut. [Formules (9)—(11)]; c'est seulement le terme $u_{0,0}$. qui peut avoir dans ce cas la forme plus generale:

$$u_{0,0} = \alpha_{0,0}^{(1)} + \beta_{0,0}^{(1)} \log r_1 + \gamma_{0,0}^{(1)} \log r_2 + \delta_{0,0}^{(1)} \log r_1 . \log r_2. \tag{14}$$

R é c i p r o q u e m e n t, si nous supposons, que la série (13) converge uniformément dans (C_H), et que les $u_{m,n}$ sont donnés par par les formules (9)—(11) et (14), la fonction u satisfait au système

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \nabla_2 u = 0. \tag{15}$$

Nous allos tirer de là u n e c o n s é q u e n c e i m p o r t a n t e:

Soit $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ une fonction u n i f o r m e, qui dans la couronne (C_H) remplit les équations (6). En prenant la fonction u sous

la forme (13) on obtient pour les $u_{m,n}$ des formules (9)—(12). La fonction u est alors l'intégrale de l'équation

$$\nabla_2 u = 0.$$

On a donc le théorème, qui est une généralisation d'une partie du théorème démontré dans le § 4me du I Chapitre:

„Toute fonction uniforme $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$, satisfaisant dans (C_H) au système des équations (6) est nécessairement hyperharmonique dans cette couronne".

Mais on peut aller plus loin. Soit $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ une fonction uniforme, satisfaisant dans (C_B) au système (15). Prenons encore la fonction u sous la forme (13), les $u_{m,n}$ étant définis par des formules (9)—(11) et (14). Nous voyons, que c'est le terme $u_{0,0}$ seulement, qui ne satisfait pas en général à l'équation $\nabla_1 u = 0$, pendant que les autres termes sont des fonctions hyperharmoniques.

On a donc le théorème, qui est une généralisation de la deuxième partie du théorème, démontré dans le § 4me du Ier Chapitre:

„Pour toute fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$, uniforme dans (C_H), satisfaisant au système (15) on peut trouver une constante c telle, que la fonction

$$u - c \log r_1 \log r_2$$

sera hyperharmonique dans (C_H).

Pour que la fonction u soit d'elle même hyperharmonique il faut et il suffit que

$$c = 0".$$

CHAPITRE III.

Intégrale de Poisson et Problème de Dirichlet.

§ 1. **Théorème sur maximum et minimum.** Avant d'aborder le sujet propre du chapitre, nous allons donner un théorème, qui nous sera utile dans ce qui va suivre.

Soit u une fonction doublement harmonique dans un domaine (T). Cette fonction étant harmonique jouit alors de la propriété, d'avoir des points, où elle devient extremum, toujours sur la frontière du (T). Or dans le cas d'une certaine classe des domaines,

on peut pour les fonctions doublement harmoniques donner des renseignements plus précis sur les points d'extremum.

Les domaines en question sont des domaines „cylindriques„[1]), dont on a déjà fait l'usage dlan la théorie de deux variables complexes.

La définition des ces domaines est suivante:

Soit (D_1) un domaine, situé dans le plan de la variable complexe z_1 et (D_2) un domaine, situé dans le plan de la variable complexe z_2. L'ensemble des points (x_1, y_1, x_2, y_2), (où on a posé $z_\varkappa = x_\varkappa + iy_\varkappa$) tels, que (x_1, y_1) appartient à (D_1) et (x_2, y_2) à D_2, est évidemment uu domaine (T_c) à quatre dimensions, domaine, qu'on appelle „cylindrique" [formé par (D_1) et (D_2)]".

Un exemple simple d'un tel domaine nous est fourni par l'hyperspéroïde.

La variété à deux dimensions, située sur la frontière du (T_c) qu'on obtient, en choisissant à la fois (x_1, y_1) sur la frontière du (D_1) et (x_2, y_2) sur la frontière du (D_2) s'appellera „contour" du domaine.

Ceci posé, ou peut maintenant démontrer la proposition suivante:

„Si la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ est doublement harmonique dans un domaine cylindrique (T_c) et continue dans ce domaine fermé, alors un du moins d'entre les points du maximum (absolue) de la foncion u est situé sur le contour du (T_c)".

Dém. Soient (D_1) et (D_2) deux domaines planes à l'aide desquelles (T_c) est défini et soit $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$ un des points, où la fonction u devient maximum. Nous savons, que ce point est sur la frontière du (T_c) (en dehors du cas trivial $u = \text{const}$), et alors une au moins de deux circonstances doit se présenter:

(x_1^0, y_1^0) doit être point frontière du (D_1), ou (x_2^0, y_2^0) doit être point frontière du (D_2). Supposons, que par exemple c'est le premier cas, qui a lieu. Or, on voit sans peine, que la fonction $u(x_1^0, y_1^0, x_2, y_2)$, considerée comme la fonction des variables (x_2, y_2), a un des points du maximum (absolue) sur la frontière du (D_2). Soit $(\bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0)$ un d'entre tels points.

---

[1]) V. p. e. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie II Bd. I Lieferung.

Je dis, que le point $(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0)$ est le point du maximum (absolue) pour la fonction $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ dans (T_c).

En effet, on a

$$u(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0) \geqq u(x_1^0, y_1^0, x_2, y_2)$$

tans tout (D_2) et alors

$$u(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0) \geqq u(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0). \tag{1}$$

D'autre part d'après l'hypothèse l'inégalité

$$u(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) \geqq u(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

est valable dans tout (T_c) et alors

$$u(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0) \geqq u(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0). \tag{2}$$

On a donc

$$u(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0) = u(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0).$$

ce qui nous montre, que le point $(x_1^0, y_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{y}_2^0)$, (qui est situé sur le contour!) est aussi un point, où la fonction u devient maximum. C. q. f. d.

Remarque. Il est évident, qu'une proposition analogue pour les points du minimum (absolue) est vraie.

§ 2. Problème de Dirichlet dans le cas du hypersphéroïde. Nous allons maintenant donner l'énocé du problème, dont la solution constitue l'objet principale de ce chapitre.

Nous l'appellerons **„problème de Dirichlet"** par analogie à la théorie du potentiel, en ajoutant, que nous nous bornerons, aussi bien dans l'énoncé, que dans la solution, au cas le plus simple, à savoir du hypersphéroïde.

Voici l'énoncé du problème:

„Soit $f(\theta_1, \theta_2)$ une fonction définie et continue sur le contour du hypersphéroïde (T_H), dont le centre se confond avec l'origine des coordonnées. Soient R_1 et R_2 les rayons du (T_H).

Déterminer une fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$

1° doublement harmonique à l'intérieur du (T_H),

2° telle, qu'on ait

$$\lim [u(r_1, \varphi_1; r_2, \varphi_2) - f(\theta_1, \theta_2)] = 0,$$
$$(r_1, \varphi_1, r_2 . \varphi_2) \rightarrow (R_1 . \theta_1, R_2, \theta_2)$$

le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ étant situé toujours à l'intérieur du (T_H) et $(R_1, \theta_1, R_2, \theta_2)$. étant un point quelconque sur le contour".

Dans ce qui va suivre nous allons montrer que la solution du problème proposée existe toujours et qu'elle est unique. Ici nous voulons seulement faire encore une remarque.

Si on compare l'enoncé du problème formulé plus haut à celui, qu'on donne au problème de Dirichlet dans la théorie du potentiel, on voit, qu'il y a une différence entre ces problèmes. Dans la théorie des fonctions harmoniques on demande la fonction u, continue dans tout domaine fermé, tandis que dans le problème, formulé plus haut, nous avons omis cette condition. On trouvera l'explication de cette différence pendant la démonstration du théorème d'unicité de solution.

§ 3. Théorème d'unicité.

En passant à la solution du problème de Dirichlet, nous allons démontrer la proposition suivante:

„Le problème de Dirichlet possède au plus une solution".

Voici quelques lemmes, qui dans leur ensemble sont équivalents à notre assertion.

I. „Il existe au plus une solution du problème, qui est continue dans (T_H) fermé".

Ceci est évidemment une concéquence immédiate du théorème sur les extrema des fonctions doublement harmoniques.

II. „Une solution, continue dans (T_H) fermé, existe".

Nous démontrerons ce lemme dans le § 4[me], naturellement d'une manière indépandante des considérations du paragraphe présent.

III. „Si u est une solution du problème, alors u est continue dans le domaine fermé (T_H)".

En effet, supposons, que la fonction u est une solution du problème de Dirichlet dans le cas particulièr

$$f(\theta_1, \theta_2) \equiv 0.$$

La fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend donc vers zéro, lorsque le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend vers un point du contour, en restant à l'in-

térieur du (T_H). En vertu de la remarque, que le contour est un ensemble fermé, on peut affirmer, que cette convergence est uniforme. On peut donc à tout $\varepsilon > 0$ faire adjoindre un autre nombre positif δ, tel qu'on ait

$$R_1 - r_1 < \delta,\ R_2 - r_2 < \delta \supset \mid u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) \mid < \varepsilon.$$

Soit maintenant (T'_H) un hypersphéroïde concentrique avec (T_H), dont les rayons R'_1 et R'_2 sont assujettis aux conditions

$$R_1 - R'_1 < \delta$$
$$R_2 - R'_2 < \delta.$$

On a donc

$$\mid u(R'_1, \varphi_1, R'_2, \varphi_2) \mid < \varepsilon$$

et alors d'après le théorème sur l'extremum on a

$$\mid u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) \mid < \varepsilon$$

dans tout (T'_H) fermé.

Des nombres ε et δ étant aussi petits, que l'on les veut, on voit, que

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) \equiv 0$$

dans tout l'intérieur du (T_H).

Notre lemme étant démontré dans ce cas particulièr, on peut maintenant donner une démonstration rapide dans le cas général.

Supposons, qu'il existe une solution v du problème de Dirichlet, qui n'est pas continue dans (T_H) ferme. On sait, la validité du lemme II étant admis, qu'il existerait encore une autre solution u, qui serait continue dans (T_H) fermé. La différence $v - u$ était alors une solution du problème de Dirichlet avec des données $f(\theta_1, \theta_2) \equiv 0$, qui ne serait pas continue dans (T_H) fermé, ce qui est impossible. C. q. f. d.

Remarque. Ces trois lemmes prouvent, que notre proposition énoncée au début de ce paragraphe, est vraie. .Il nous reste sseulement à démontrer le lemme IIme, c'est à dire à prouver, qu'une olution continue dans (T_H) fermé, existe.

§ 4. Intégrale de Poisson pour les fonctions doublement harmoniques.

L'existence d'une solution du problème de Dirichlet et de

plus la forme de cette solution, peut nous être facilement suggérée, par les théorèmes de la théorie du potentiel logarithmique. On sait, que dans cette théorie dans le cas d'un cercle, le problème de Dirichlet est resolu à l'aide de l'intégrale de Poisson[1]).

Dans la théorie des fonctions doublement harmoniques on peut aussi considérer un algorithme intégrale, qui nous fournira la solution du problème de Dirichlet dans le cas du hypersphéroïde, auquel nous réserverons le nom „intégrale de Poisson pour les fonctions doublement harmoniques".

Soit $f(\theta_1, \theta_2)$ une fonction continue sur le contour du (T_H). Par „l'intégrale de Poisson" appartenant à cette fonction nous entenderons la formule

$$(3) \qquad u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, H_1 \,.\, H_2\, d\theta_1, d\theta_2$$

où

$$(4) \qquad H_\varkappa = \frac{R_\varkappa^2 - r_\varkappa^2}{l_\varkappa^2} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

et où $l_\varkappa$ désigne la distance des points $(R_\varkappa, \theta_\varkappa)$ et $(r_\varkappa, \varphi_\varkappa)$.

On voit immédiatement que la fonction (3) est doublement harmonique à l'intérieur du (T_H).

§ 5. Solution du problème de Dirichlet. Comme nous avons dit plus haut, on peut ésperer, que la solution du problème de Dirichlet est fournie par la fonction (3). Pour cela il nous reste à démontrer, que cette fonction tend vers $f(\theta_1, \theta_2)$, lorsque le point $(r_1, \varphi_1, r_2 . \varphi_2)$ en restant à l'intérieur du (T_H) tend vers $(R_1, \theta_1, R_2, \theta_2)$. D'autre part, il nous faut, en vertu du lemme IIme du § précédent, démontrer, que u est continue dans (T_H) fermé.

Prouvons d'abord, que la fonction u tend vers une limite déterminée, quand le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend vers un point de frontière, point, qui n'est pas situé sur le contour du (T_H).

Pour fixer les idées supposons, que les coordonnées hypersphéroïdales de ce point sont $(R_1, \theta_1, r_2^{(0)}, 0)$, ce qu'on peut toujours

---

[1]) V. p. e. Goursat. Cours d'Analyse. T. III. II Éd. p. 138 et suiv. ou Picard. Traité d'Analyse. T. II. Éd, II. p. 15 et suiv.

obtenir par une simple transformation des variables. On a naturellement

$$r_2^{(0)} < R_2$$

et il nous faut prouver, que la fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend vers une limite, lorsque le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend, en restant à l'intérieur du (T_H), vers le point $(R_1, 0, r_2^{(0)}, 0)$.

Nous ferons ceci, en démontrant, que dans ce cas, la différence

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \theta_2)\, H_2^0\, d\theta_2 \tag{5}$$

$\left(\text{où on a posé} \quad H_2^0 = \dfrac{R_2^2 - r_2^{(0)2}}{R_2^2 + 2R_2 r_2^{(0)} \cos\theta_2 + r_2^{(0)2}}\right)$, tend vers zéro.

Soit δ un nombre positif arbitraire. En modifiant convenablement des raisonnéments classiques, on obtient:

$$\left| u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \theta_2)\, H_2^0\, d\theta_2 \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} H_1 \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(\theta_1, \theta_2)\, H_2 - f(0, \theta_2)\, H_2^0 |\, d\theta_2\right] d\theta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} H_1 \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(\theta_1, \theta_2) | \cdot | H_2 - H_2^0 |\, d\theta_2\right] d\theta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} H_1 \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(\theta_1, \theta_2) - f(0, \theta) |\, H_2^0\, d\theta_2\right] d\theta_1.$$

Désignons les trois intégrales du second membre de cette inégalité par I_1, I_2, I_3 et par M la plus petite limite supérieure de la fonction $| f(\theta_1, \theta_2) |$. Soit ε un nombre positif arbitraire et δ un autre nombre positif choisi de tel façon. que les relations

$$\begin{gathered} | r_2 - r_2^0 | < \delta \\ | \varphi_2 | < \delta \\ r_3 < R_2 \end{gathered} \tag{6}$$

entraînent l'inégalité

$$| H_2 - H_2^0 | < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Supposons de plus, qu'on a

$$| \theta_1 | < \delta \supset | f(\theta_1, \theta_2) - f(0, \theta_2) | < \frac{\varepsilon}{3 \,.\, \max H_2^0}.$$

Il est évident, qu'on peut toujours satisfaire à ces inégalités, dont une conséquence immédiate sont des inégalités

$$| I_2 | \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$| I_3 | \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il s'agit encore de prouver, que l'intégrale I_1 tend vers zéro avec $R_1 - r_1$.

Désignons par N le nombre

$$N = \max | f(\theta_1, \theta_2) H_2 - f(0, \theta_2) \,.\, H_2^0 | ,$$

où la fonction $f(\theta_1, \theta_2) \,.\, H_2 - f(0, \theta_2) H_2^0$ est considerée comme la fonction des variables $\theta_1, \theta_2, r_2, \varphi_2$ dans le domaine (6) pour les variables r_2, φ_2, des variables θ_1, θ_2 étant arbitraires.

On voit facilement, que

$$| I_1 | \leqq \frac{N}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi - \delta} H_1 \, d\theta_1,$$

et comme d'après un théorème classique sur l'intégrale de Poisson nous savons que la second nombre tend vers zéro avec $R_1 - r_1$, nous voyons, que l'intégrale I_1 tend aussi vers zéro.

D'après cela nous pouvons dire:

„L'intégrale de Poisson pour les fonctions doublement harmoniques, appartenant à une fonction continue, tend vers une limite déterminée, quand le point variable tend, en restant à l'intérieur du (T_H), vers un point frontière du (T_H), qui n'appartient pas au contour du (T_H)".

Envisageons maintenant un point du contour, p. ex. le point $(R_1, 0, R_2, 0)$ (ce qu'on peut toujours supposer sans diminuer la généralité des raisonnements) et examinons ce qui se passe, quand le point $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ tend, en restant à l'intérieur du (T_H), vers ce point. Il est facile de prévoir, que la différence

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) - f(0, 0)$$

tend dans ces circonstances vers zéro.

En effet. On a

$$u(r_1,\varphi_1,r_2,\varphi_2)-f(0,0)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}[f(\theta_1,\theta_2)-f(0,0)]\,H_1\,.\,H_2\,d\theta_1\,d\theta_2+$$

$$+\frac{1}{4\pi_2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\{\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}[f(\theta_1,\theta_2)-f(0,0)]\,H_1\,H_2\,d\theta_2\}\,d\theta_1+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}\{\int\limits_{-\delta}^{+\delta}[f(\theta_1,\theta_2)-f(0,0)]\,H_1\,H_2\,d\theta_2\}\,d\theta_1+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\delta}^{+\delta}\int\limits_{-\delta}^{+\delta}[f(\theta_1,\theta_2)-f(0,0)]\,.\,H_1\,H_2\,d\theta_1\,d\theta_2.$$

Nous avons donc

$$|\,u(r_1,\varphi_1,r_2,\varphi_2)-f(0,0)\,|\leqq\frac{2M}{4\pi^2}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}H_1\,H_2\,d\theta_1\,d\theta_2+$$

$$+\frac{2M}{4\pi^2}\int\limits_{-\delta}^{+\delta}[\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}H_1\,H_2\,d\theta_2]\,d\theta_1+\frac{2M}{4\pi^2}\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}[\int\limits_{-\delta}^{+\delta}H_1\,H_2\,d\theta_2]\,d\theta_1$$
$$+\,|\,f(\theta_1',\theta_2')-f(0,0)\,|\,,$$

où on a par (θ_1',θ_2') désigné le point, pour lequel la fonction

$$|\,f(\theta_1,\theta_2)-f(0,0)\,|$$

devient maximum absolue dans le domaine

$$|\,\theta_1\,|\leqq\delta$$
$$|\,\theta_2\,|\leqq\delta$$

On voit maintenant facilement, que tous les termes d'inégalité (7) peuvent être rendus si petits, qu'on les veut, ce qui nous montre, que

„l'intégrale de Poisson pour les fonctions doublement harmoniques, appartenant à la fonction $f(\theta_1,\theta_2)$ tend vers cette fonction (et même uniformément), quand le point $(r_1,\varphi_1,r_2,\varphi_2)$ tend vers un point déterminé du contour".

Remarque. Les considérations précédentes nous démontrent, que notre solution est continue dans (T_H) fermé; nous avons donc démontré aussi le II[me] lemme du paragraphe précédent.

En faisant un résumé, nous obtenons la deuxième proposition fondamentale de ce mémoire:

„Il existe toujours une et uue seule solution du problème de Dirichlet, dans le cas du hypersphéroïde. Cette solution est nécessairement continue dans (T_H) fermé“.

§ 6. Remarques sur le problème de Dirichlet dans le cas, où les données sont définies sur toute la frontière du (T_H).

Il existe une différence profonde entre, le problème de Dirichlet traité dans la théorie du potentiel et entre le problème traité plus haut. Cette différence consiste en le fait, que dans la théorie du potentiel la fonction donnée est définie sur toute la frontière du domaine, pendant que dans la théorie des fonctions doublement harmoniques la fonction donnée est définie sur une partie de la frontière. partie, qui est une multiplicité à deux dimensions, pendant que la frontière même est une multiplicité à trois dimensions.

Or on peut naturellement aussi dans le cas des fonctions doublement harmoniques formuler le problème de Dirichlet avec des données définies sur toute la frontière du (T_H), mais d'après les résultats déjà obtenus on peut affirmer, que ce problème n'est pas en général possible [1]).

Précisons le problème:

„Soit $f(M)$ une fonction continue du point de la frontière du (T_H). Détérminer une fonction $u(P)$:

1° continue dans (T_H) fermé

2° doublement harmonique à l'intérieur du (T_H),

3° vérifiant la conditon

$$u(P) \rightarrow f(M),$$

lorsque le pont P, étant à l'intérieur du (T_H) tend vers M“.

La solution decoule immédiatement des considérations du § 5me:

Théorème: „Pour que la solution du problème existe, il faut et il suffit, que les valeurs de la fonc-

---

[1]) Poincaré à déjà remarque ceci dans le cas des fonctions hyperharmoniques. On voit pour cela des mémoires citées plus haut.

tion $f(M)$ s'expriment par les valeurs de cette fonction, qu'elle prend sur le contour, au moyen des formules:

$$f(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(M')\, H_1\, d\theta_1$$

$$f(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(M')\, H_2\, d\theta_2 \text{“}.$$

§ 7. **Développement de l'intégrale de Poisson en série de Fourier.**

En términant ce mémoire nous allons appliquer des résultats obtenus plus haut à la théorie des fonctions hyperharmoniques.

A cet but, en suivant la marche indiquée par la théorie du potentiel, développons l'ntégrale de Poisson en série de Fourier.

Soit $f(\theta_1, \theta_2)$ une fonction continue du point du contour du (T_H). L'intégrale de Poisson, qui correspond à cette fonction peut être mis sous la forme

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, H_1\, d\theta_1 \right] . H_2\, d\theta_2 .$$

Mais on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, H_1\, d\theta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^{\varkappa} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varkappa (\theta_1 - \varphi_1) \,.\, d\theta_1 \text{ [1]},$$

et alors

$$u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^{\varkappa} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varkappa (\theta_1 - \varphi_1)\, d\theta_1\, d\theta_2 +$$

[1]) V. p. e. Goursat l. c. p. 187 et suiv.

$$(8) \quad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^l \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos l\,(\theta_2 - \varphi_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^\varkappa \cdot \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^l \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varkappa(\theta_1 - \varphi_1) . \cos l\,(\theta_2 - \varphi_2)\, d\theta_1 d\theta_2 .$$

La série (8) converge dans tout l'intérieur du (T_H) et cette convergence est uniforme dans tout domaine fermé, situé entièrement à l'intérieur du (T_H). La manière dont on peut établir ces points essentiels est classique, et on peut pour cela consulter p. ex. le livre cité de M. Goursat.

§ 8. **L'intégrale de Poisson et les fonctions hyperharmoniques.** La fonction $u(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ définie par la formule (3), où la fonction $f(\theta_1, \theta_2)$ est supposée intégrale est évidemment doublement harmonique, mais elle peut ne pas être hyperharmonique. D'atre part, on sait, que toute fonction hyperharmonique dans un hypersphéroïde (T_H), situé à l'intérieur du domaine de regularité de la fonction u peut être toujours mis sous la forme (3). Nous sommes donc d'une manière naturelle conduits au problème: „Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes, pour que la fonction (3) soit hyperharmonique à l'intérieur du (T_H)".

Pour résoudre cette question, prenons comme le point de départ le développement (8) et calculons la valeur du $\nabla_1 u$.

On a

$$\nabla_1 u = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \nabla_1 \left[\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^\varkappa \left(\frac{r_2}{R_2}\right)^l \cdot \right.$$

$$(9) \qquad \left. \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varkappa\,(\theta_1 - \varphi_1) \cos l\,(\theta_2 - \varphi_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varkappa\,.\,l}{R_1\,.\,R_2} \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{\varkappa-1} \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{l-1}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos[(\varkappa\theta_1 - l\theta_2) - (\varkappa\varphi_1 - l\varphi_2)]\, d\theta_1\, d\theta_2 .$$

Cherchons d'abord les conditions nécessaires. On doit avoir $\nabla_1 u = 0$ dans (T_H), donc tous les coefficients de la série entière (9) doivent être nuls:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos[(\varkappa\theta_1 - l\theta_2) - (\varkappa\varphi_1 - l\varphi_2)]\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0$$

$$(\varkappa, l = 1, 2, \ldots)$$

Cettes relations doivent être vérifiées pour toutes les valeurs des variables φ_1, φ_2, donc on doit avoir

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0 \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \sin(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(\varkappa, l = 1, 2, \ldots).$$

Les relations (10) sont nécessaires, pour que l'intégrale (3) satisfasse à l'équation $\nabla_1 u = 0$, donc pour qu'elle représente une fonction hyperharmonique. Ces relations sont d'ailleurs — comme il est facile de voir — suffisantes, ce qui implique la troisième proposition fondamentale du présent travail:

„La fonction $f(\theta_1, \theta_2)$ étant supposée intégrable sur le contour du (T_H), les relations (10) expriment des conditions nécessaires et suffisantes, pour que l'intégrale (3) soit une fonction hyperharmonique à l'intérieur du (T_H)".

Remarque. On peut à l'aide de ce théorème facilement démontrer le théorème fondamentale du § 4me [1]).

§ 9. Problème de Dirichlet dans le cas des fonctions hyperharmoniques.

Prenons maintenant le problème de Dirichlet pour les fonctions hyperharmoniques, c'est à dire celui qu'on obtient du problème énoncé dans le § 2me, en remplaçant les mots „doublement harmonique" par le mot „hyperharmonique".

---

[1]) On voit pour cela la première des notres notes, citées plus haut.

On voit immédiatement, que ce problème n'est pas en général possible, parceque la solution sera une fonction doublement harmonique, parfaitement détérminée, qui ne sera pas en général hyperharmonique.

Voici le théorème, qui donne la réponse complète:

„Pour que le problème de Dirichlet pour les fonctions hyperharmoniques soit possible, il faut et il suffit, qu'on ait

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \sin(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = 0\text{“}$$

$$(\varkappa, l = 1, 2, \ldots).$$

Remarque. En vertu du théorème, énoncé dans le § 6[me] et des remarques faites plus haut, on peut facilement énoncer le théorème sur la possibilité du problème de Dirichlet pour les fonctions hyperharmoniques dans le cas, où les données sont définies sur toute la frontière du (T_H).

§ 10. **Étude des relations (10).** Ce dernier paragraphe est consacré à l'étude de la classe des fonctions $f(\theta_1, \theta_2)$, définies sur le contour du (T_H) et satisfaisantes aux relations (10). Dans cette étude nous nous bornerons aux fonctions développables en séries de Fourier uniformément convergentes.

Soit $f(\theta_1, \theta_2)$ définie par la série

$$(11)\quad \begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} [&\alpha_{rs} \cos r\theta_1 \cos s\theta_2 + \beta_{rs} \cos r\theta_1 \,.\, \sin s\theta_2 + \\ &+ \gamma_{rs} \sin r\theta_1 \cos s\theta_2 + \delta_{rs} \sin r\theta_1 \sin s\theta_2], \end{aligned}$$

dont nous supposons, qu'elle converge uniformément.

L'intégration de la série terme à terme étant legitime, on trouve facilement des relations

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \cos(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = \pi^2 (\alpha_{\varkappa,l} + \delta_{\varkappa,l})$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) \sin(\varkappa\theta_1 - l\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = \pi^2 (\gamma_{\varkappa l} - \beta_{\varkappa l})$$

$$(\varkappa, l = 1, 2, \ldots).$$

Pour qu'on ait donc les relations (10) satisfaites, il faut et il suffit, qu'on ait

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\varkappa l} + \delta_{\varkappa l} = 0 \\ \beta_{\varkappa l} - \gamma_{\varkappa l} = 0 \end{array} \right. \qquad (\varkappa, l = 1, 2, \ldots).$$

Dans le même temps nous voyons, que les coefficients $\alpha_{\varkappa 0}$, α_{0l} sont entièrement arbitraires.

Les considérations précédentes nous montrent que pour r et s naturels, le polynome trigonométrique constituant un terme de la série (11) peut renfermer seulement deux constantes arbitraires et qu'il peut être mis sous la forme

$$\alpha_{r,s} \cos(r\theta_1, + s\theta_2) + \beta_{r,s} \,.\, \sin(r\theta_1, + s\theta_2).$$

Ceci implique la proposition suivante:

„Pour que la fonction $f(\theta_1, \theta_2)$ définie sur le contour du (T_H) et développable en série (11) uniformément convergente satisfasse aux relations (10), il faut il suffit qu'elle soit de la forme

$$f(\theta_1, \theta_2) = \varphi(\theta_1) + \varphi(\theta_2) + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}[\alpha_{rs}\cos(r\theta_1 + s\theta_2) + \beta_{rs}\sin(r\theta_1 + s\theta_2)]$$

où les fonctions $\varphi(\theta_1)$ et $\varphi(\theta_2)$ sont arbitraires, assujetties seulement à la condition d'être développables en séries de Fourier uniformément convergentes et où les constantes α_{rs}, β_{rs} sont entièrement arbitraires".

Nouveaux fascicules du „Mémorial des Sciences mathématiques“ [1]).

Fascicule XV. *La Logique des Mathématiques* par M. S. Zaremba. L'auteur s'est efforcé d'exposer le plus clairement et le plus simplement qu'il a pu, l'essentiel de ce qui doit être considéré comme définitivement acquis à la Science en Logique déductive, en cherchant à mettre en évidence l'intérêt que présente la logique théorique pour les mathématiciens. Ne disposant que d'une place strictement mesurée, l'auteur a passé sous silence les idées brièvement esquissées dans ces dernières années par des savants d'un mérite considérable, mais qui ne paraissent pas avoir amené encore leurs conceptions à la forme claire et précise qu'elles devraient avoir pour pouvoir être discutées utilement.

Fascicule XVI. *Formules Stokiennes* par M. A. Buhl. M. Buhl coordonne, avec beaucoup d'élégance, au point de vue de la structure, les diverses identités que l'on peut déduire des identités fondamentales

$$(1) \quad \int_c X\,dY = \int\!\!\int_s dX\,dY \quad \text{et} \quad \int\!\!\int_s X\,dY\,dZ = \int\!\!\int\!\!\int_V dX\,dY\,dZ$$

et, ce qui constitue l'intérêt principal de l'ouvrage, il fait voir comment, en partant des identités (1), on peut former des expressions qui, égalées à zéro, fournissent les équations de divers problèmes fondamentaux d'Analyse, de Mécanique et de Physique. Les considérations développées par M. Buhl ne constituent évidemment pas des démonstrations de ce que les équations qu'il envisage sont bien celles des problèmes auxquels il les rapporte, mais elles sont fort intéressantes parce qu'elles permettent de donner des formes diver-

---

[1]) Voir le t. III, p. 142 et le t IV p 122 de ces „Annales“.

ses aux postulats dont elles dérivent et surtout parce qu'elles permettent de mettre en évidence la parenté des postulats sur lesquels reposent différentes théories de la Physique mathématique. Nous osons croire qu'en suivant la voie où s'est engagé M. Buhl, on ne manquera pas de constater des similitudes propres à accroître sensiblement la cohérence de l'ensemble de la physique théorique.

Fascicule XVII. *Théorie générale des séries de Dirichlet* par M. G. Valiron. Les séries de Dirichlet les plus générales sont les séries de la forme

$$\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

où $s = \sigma + it$ est la variable complexe, les λ_n des nombres réels indéfiniment croissants ($\lambda_{n+1} > \lambda_n$, $\lim \lambda_n = +\infty$). Etant donné l'importance de diverses formes particulières des séries de Dirichlet, le public mathématique saura certainement gré à M. Valiron, qui a apporté lui-même d'importantes contributions à la théorie de ces séries, d'avoir, en écrivant le fascicule considéré du „Mémorial", donné, aux personnes désireuses d'approfondir la théorie des séries de Dirichlet, le moyen d'y arriver moyennant le minimum d'effort.

Fascicule XVIII. *Les Réseaux (ou graphes)*, per M. A. Sainte-Laguë. L'auteur formule comme il suit les deux types de questions que l'on étudie dans la branche de la Science à laquelle est consacré le fascicule du „Mémorial" qui nous occupe:

a) Est-il possible de juxtaposer des éléments donnés de façon à obtenir une disposition fixée à l'avance?

b) Si une telle juxtaposition est possible, de combien de façons l'est-elle?

Dans ces énoncés il faut entendre par „éléments" donnés les éléments appartenant à un ensemble déterminé E et, pour que ces énoncés eux-mêmes puissent prendre une forme précise, il est nécessaire que, au moyen d'une convention spéciale C, on ait fait correspondre à tout élément A de l'ensemble E un certain nombre d'autres éléments de cet ensemble, appelés éléments *associés* à l'élément A. La convention C (qui est une donnée fondamentale des problèmes envisagés) est susceptible d'une représentation géométrique: après être convenu de représenter les éléments de l'ensemble E par des points, on peut joindre chacun de ces points par des

lignes, appelées *chemins*, à tous ceux qui représentent des éléments associés à l'élément que représente le point considéré; la figure ainsi obtenue s'appelle *graphe* ou *réseau* et les problèmes que l'on a à résoudre concernent alors certaines combinaisons des *chemins*. Différents jeux, comme en particulier le jeu d'échec, donnent lieu à des problèmes du genre de ceux dont il est question mais, comme le fait remarquer M. Sainte-Laguë, de tels problèmes se présentent aussi dans diverses théories mathématiques. L'ouvrage, très documenté, de M. Sainte-Laguë permettra au lecteur d'approfondir le sujet, aussi intéressant que peu étudié encore, auquel cet ouvrage est consacré.

Fascicule XIX. *Calcul différentiel absolu,* par M. R. Lagrange. Le mémoire de M. Lagrange constitue une exposition extrêmement condensée et pourtant claire de ce que l'on est convenu d'appeler „calcul différentiel absolu". L'auteur aborde la question dès le début dans toute se généralité comme un problème d'analyse pure ce qui lui permet de faire ressortir avec beaucoup de netteté les idées, en réalité très simples, qui sont à la base de la théorie qu'il expose et il présente les considérations géométriques, intimément liées à la théorie en question, comme une illustration des résultats analytiques. En définitive le mémoire de M. Lagrange atteint très bien son but et rendra de précieux services à ceux qui voudront étudier le calcul différentiel absolu.

Fascicule XX. *Les fowctions holomorphes dans le cercle-unité.* par M. A. Bloch. L'auteur caractérise comme il suit le but qu'il avait en vue. „L'objet du présent article du *Mémorial* est l'exposition des propriétés aujourd'hui connues des fonctions d'une variable complexe holomorphes ou méromorphes dans le cercle $|z| < 1$; il s'agira des relations nécessaires entre les valeurs de la fonction et de ses dérivées à l'intérieur de ce cercle, l'existence et le nombre des zéros obtenus en l'égalant à une constante, son maximum ou son minimum sur certains cercles intérieurs, etc. Le cercle-unité, dont on s'astreint à ne pas sortir, n'est cependant nullement supposé cercle de convergence ou de méromorphie".

L'article est écrit avec une grande compétence et contient un aperçu historique très intéressant.

S. Zaremba.

Compte-rendu des séances de la Société polonaise de Mathématique Section de Varsovie.

9. X. 1925. W. Sierpiński: *Sur une application des images des fonctions.*

M. S. applique les images des fonctions à la démonstration du théorème (dû à M. Mazurkiewicz), suivant lequel tout ensemble homéomorphe à un ensemble G_δ est un G_δ. La même méthode peut servir pour démontrer le théorème de M. Lavrentieff d'après lequel l'homéomorphie entre deux ensembles peut être étendue à des ensembles G_δ qui les contiennent respectivement. Voir: Fund. Math. VIII, p. 135—136.

23. X. 1925. A. Tarski: *Remarque concernant l'arithmétique des nombres cardinaux.*

M. T. attire l'attention aux recherches qui ont pour but de développer des parties de la Théorie des ensembles, les plus vastes possibles, sans avoir récours à l'axiome du choix. Un des résultats de ces recherches est le théorème suivant de M. T.: *pour tout nombre cardinal transfini (refléxif) m on a: $2^m - m = 2^m$ (par conséquent: si $2^m = m + n$, on a $2^m = n$).*

La démonstration repose, parmi autres, sur les deux lemmes suivants, démontrés sans l'axiome du choix et qui — vu des nombreuses applications — peuvent par eux-mêmes présenter quelque intérêt: 1⁰ si $m + p = m + q$, il existe p_1, q_1 et n tels que: $m = m + p_1 = m + q_1, p_1 = n + p_1$ et $q = n + q_1$; 2⁰ si $m . p = n + q$ on a $m \leq n$ ou bien $2^p \leq 2^q$.

6. XI. 1925. C. Kuratowski: *Sur la métrisation des espaces topologiques* (travaux de MM. Alexandroff, Tychonoff, Urysohn et Vietoris).

S. Straszewicz: *L'ouvrage de M. Radò sur les surfaces de Riemann.*

C. Zarankiewicz: *Sur les dendrites.*

20. XI. 1925. B Knaster: *Sur le problème de M. L. Vietoris.*

Ce problème (L. Vietoris: *Stetige Mengen,* Monatshefte für Math. u. Phys. XXXI, 1921, 201—202) concerne l'existence d'un ensemble connexe irréductible entre deux points dans le continu irréductible entre ces points.

Après un examen comparatif des deux théories de la structure des continus irréductibles entre deux points, dont l'une est due à M. Hahn et l'autre à MM. Janiszewski et Kuratowski, M. K. montre sur un exemple (à paraitre dans „Fundamenta Mathematicae") l'insuffisance de la première pour resoudre le problème de M. Vietoris et déduit de la seconde le théorème suivant qui en constitue une solution complète: pour qu'un continu borné C irréductible entre deux points contienne un ensemble connexe S irréductible entre ces points, il faut et il suffit que tout sous-continu de C qui n'en est pas un continu de condensation soit décomposable.

La démonstration que cette condition est suffisante fait appel au théorème de M. Zermelo *(Wohlordnungssatz),* notamment à la possibilité de ranger en une suite transfinie tous les ensembles fermés F où $C-F$ n'est pas connexe, et s'appuie sur quelques lemmes concernant la *„stratification"* des continus irréductibles, notion introduite par M. Vietoris et modifiée par MM. Knaster et Kuratowski. Le problème de rendre la démonstration effective au sens de M. Sierpiński reste ouvert.

3. XII. 1925. F. Leja: *Sur les séries semi-convergentes.* Voir: Ann. de la Soc. pol. de math. t. IV, p. 113.

5. II. 1926. W. Sierpiński: *Sur un problème de M. Menger.*

Voir: Fund. Math. t. VIII, p. 223. En rapport avec le problème de M. Menger qui a été traité par M. Hurewicz, M. Sierpiński fait encore la remarque suivante. M. W. Hurewicz a signalé (Math. Zeitschrift 24 (1925), p. 421, note [35]) que si E est un ensemble complémentaire d'un ensemble (A) de Souslin et si tout sous-ensemble E_1 de E, tel que $EE_1' = E_1$, est non-dénombrable, E est un G_δ. M. Sierpiński observe que si l'on pouvait remplacer dans cet énoncé les ensembles complémentaires des en-

sembles (A) par les ensembles (A). il en résulterait facilement que tout ensemble non-dénombrable complémentaire d'un ensemble (A), contient un sous-ensemble parfait.

19. II. 1926. S. Saks: *Sur la mesure linéarie des ensembles plans.*

M. S. prouve l'existence d'un ensemble plan parfait dont la longueur au sens de Gross est nulle, tandisque celle de Carathéodory est infinie. Le même exemple prouve qu'il existe des ensembles parfaits plans de longueur nulle au sens de Gross et dont les transformés homographiques peuvent être de longueur infinie. Voir: Fund. Math. t. IX.

5. III. 1926. Séance tenue en présence de M. le Prof. Kampé de Fériet.

C. Kuratowski: *Sur les points d'arrêt d'une courbe.*

M. K. prouve que, si l'on enlève d'un continu borné tous ses points d'arrêt, le reste est un semi-continu. La démonstration est basée sur le théorème, suivant lequel sur un continu irréductible entre a et b aucun point différent de a et b ne peut être un point d'arrêt (au sens de M. Menger).

C. Zarankiewicz: *Sur les coupures locales du plan faites par des continus de Jordan.*

M. Z. démontre les théorèmes suivants: 1° un continu qui en chacun de ses points coupe localement le plan en un nombre fini de régions est jordanien; 2° un continu jordanien qui ne coupe pas le plan contient un point où il ne le coupe non plus localement; 3° un continu qui en chacun de ses points coupe le plan localement en deux régions est une courbe simple fermée ou une courbe simple ouverte, suivant qu'il est borné ou non.

23. IV. 1926. A. Lindenbaum: *Sur l'arithmétique des types ordinaux.*

M. L. attire l'attention au fait que, dans l'état actuel, la théorie de la puissance d'ensembles est beaucoup plus „arithmétisée" que celle de l'ordre: on connaît bien peu de théorèmes concernant les *types ordinaux* en général (non spécialement ceux du bon ordre), tandis que les théorèmes concernant les *nombres cardinaux* servent d'une base commode à toute la théorie de la puissance. Seuls, les ouvrages de M. Hausdorff concernent la théorie des types ordinaux; mais les problèmes qui y sont traités sont bien compliqués et difficiles.

M. L. présente quelques théorèmes élémentaires (de lui et de

M. Tarski) sur les types ordinaux, permettant de déduire par un calcul purement arithmétique une théorie de ces types. Parmi autres, il démontre le théorème suivant (analogue à „Aequivalenzsatz“ de Schröder-Bernstein): si $\alpha = \beta + \mu$ et $\beta = \nu + \alpha$, on a: $\alpha = \beta$. Voir *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles* de A. Lindenbaum et A. Tarski, C. R. de la Soc. de Sc. de Varsovie.

28. V. et 11. VI. 1926. S. Mazurkiewicz: *Sur la topologie de l'espace à trois dimensions.* Voir Fund. Math. IX.

25. VI. 1926. S. Saks: *Sur les fonctionnelles de M. Banach.*

M. S. étudie une classe de fonctionnelles continues et linéaires introduite par M. Banach (Bull. Sc. Math. 1925). Il en signale quelques applications à la théorie des développements des fonctions; en particulier: pour tout système orthogonal de fonctions bornées (de carré sommable) $\{\varphi_n(x)\}$ dans $(0, 1)$, il existe un ensemble E dans $(0, 1)$ tel que le développement de toute fonction sommable (de carré sommable) suivant le système $\{\varphi_n\}$ converge presque partout dans E, et qu'il existe des fonctions sommables (de carré sommable) dont le développement diverge presque partout dans le complémentaire de E. Dans le cas où le système $\{\varphi_n\}$ est en outre complet, le développement de toute fonction sommable (de carré sommable) converge encore presque partout dans E vers les valeurs de la fonction. Voir: Fund. Math. t. X.

2. VII. 1926. Bergman: *Sur les fonctions harmoniques.*

5. VII. 1926. Séance tenue à l'occasion de l'arrivée de M. le Prof. Nicolas Lusin.

M. Nicolas Lusin présente quelques nouveaux résultats concernant les ensembles (A) de Souslin (voir N. Lusin: „*Sur les ensembles analytiques*“, Fundamenta Mathematicae t. X, p. 1—95). Il donne en particulier une démonstration nouvelle du théorème de Souslin (fondamental dans la théorie des ensembles (A)) et du théorème dit *de l'unicité*; les deux démonstrations n'utilisent pas des nombres transfinis, mais sont basées sur la notion de *séparabilité B*.

On dit que deux ensembles M et N sont *séparables B*, lorsqu'il existe deux ensembles mesurables B, P et Q, tels que

$$M \subset P, \ N \subset Q, \text{ et } PQ = 0.$$

On démontre sans peine que si

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots, \ N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots,$$

et si les ensembles M et N ne sont pas séparables B, il existe deux

indices p et q tels que les ensembles M_p et N_q ne sont pas séparables B.

Le théorème de Souslin peut être exprimé comme il suit: *Deux ensembles (A) sans point commun sont toujours séparables B.*

Démonstration. Soient E et H deux ensembles (A), noyaux des systèmes d'intervalles $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa}\}$, resp. $\{\gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa}\}$, où l'on a toujours

$$(1) \qquad \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa} \supset \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa, n_{\varkappa+1}} \text{ et } \gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa} \supset \gamma_{n_1, n_2, \ldots n_\varkappa, n_{\varkappa+1}}.$$

Posons:

$$E^{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} = \sum_{(n_1, n_2, \ldots)} \delta_{p_1} \delta_{p_1, p_2} \ldots \delta_{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} \delta_{p_1, \ldots, p_\varkappa, n_1} \delta_{p_1, \ldots, p_\varkappa, n_1, n_2} \ldots,$$

où la sommation Σ s'étend à toutes les suites infinies d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ Les ensembles $H^{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa}$ seront définis d'une façon analogue.

Admettons que les ensembles E et H ne sont pas séparables B. Comme

$$E = E^1 + E^2 + E^3 + \ldots \text{ et } H = H^1 + H^2 + H^3 + \ldots,$$

il existe des indices p_1 et q_1 tels que les ensembles E^{p_1} et H^{q_1} ne sont pas séparables B. Or, comme

$$E^{p_1} = E^{p_1, 1} + E^{p_1, 2} + E^{p_1, 3} + \ldots, \; H = H^{q_1, 1} + H^{q_1, 2} + \ldots,$$

il existe des indices p_2 et q_2 tels que les ensembles E^{p_1, p_2} et H^{q_1, q_2} ne sont pas séparables B. En répétant ce raisonnement, on arrive à deux suites infinies d'indices

$$p_1, p_2, p_3, \ldots \text{ et } q_1, q_2, q_3, \ldots,$$

telles que pour $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$ les ensembles

$$E^{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} \text{ et } H^{q_1, q_2, \ldots, q_\varkappa}$$

ne sont pas séparables B.

Or, comme

$$E^{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} \subset \delta_{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} \text{ et } H^{q_1, q_2, \ldots, q_\varkappa} \subset \gamma_{q_1, q_2, \ldots, q_\varkappa},$$

il en résulte que

$$\delta_{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} \cdot \gamma_{q_1, q_2, \ldots, q_\varkappa} \neq 0 \text{ pour } \varkappa = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où l'on conclut sans peine, d'après (1), que

$$EH \neq 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Un système d'intervalles $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa}\}$ est dit un *système d'unicité*, s'il n'existe deux suites infinies d'indices $p_1, p_2, p_3, \ldots$ et $q_1, q_2, q_3, \ldots$, qui soient distinctes et telles qu'on ait

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \delta_{p_1, p_2, \ldots p_\varkappa} \; \delta_{q_1, q_2, \ldots q_\varkappa} \neq 0.$$

Le *théorème d'unicité* peut être exprimé comme il suit:

Pour qu'un ensemble soit mesurable B, il faut et il suffit qu'il soit noyau d'un système d'unicité.

Pour démontrer que les ensembles mesurables B sont noyaux des systèmes d'unicité, on démontre facilement que cette propriété appartient aux intervalles, ainsi qu'aux sommes et produits d'une infinité dénombrable quelconque d'ensembles dont chacun jouit de cette propriété.

Soit maintenant E le noyau d'un système d'unicité $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa}\}$. On voit sans peine que les ensembles $E^1, E^2, E^3, \ldots$ n'ont pas d'élément commun deux à deux. Or, ils sont des ensembles (A), donc (d'après le théorème déjà démontré) ils sont séparables B. Il existe donc des ensembles mesurables B: B^1, B^2, $B^3, \ldots$, tels que

$$E^p \subset B^p \subset \delta_p \text{ et } B^p B^q = 0 \text{ pour } p \neq q.$$

On voit d'une façon analogue que les ensembles $E^{p,q}$ $(p, q = 1, 2, 3, \ldots)$ sont sans éléments communs deux à deux, et qu'il existe des ensembles mesurables B, $B^{p,q}$, tels que

$$E^{p,q} \subset B^{p,q} \subset \delta_{p,q} \text{ et } B^{p,q} B^{r,s} = 0 \text{ pour } (p,q) \neq (r,s).$$

Pour tout système d'indices $(p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa)$ on obtient ainsi un ensemble mesurable B, $B^{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa}$, tel que

(2) $$E^{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} \subset B^{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} \subset \delta_{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa}$$

et

(3) $$B^{p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa} B^{q_1, q_2, \ldots, q_\varkappa} = 0 \text{ pour } (p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa) \neq (q_1, q_2, \ldots, q_\varkappa).$$

En vertu de (2) et (3) on trouve ensuite la formule

$$E = \sum_{p_1} B^{p_1} \cdot \sum_{p_1, p_2} B^{p_1, p_2} \cdot \sum_{p_1, p_2, p_3} B^{p_1, p_2, p_3} \ldots,$$

ce qui implique que E est un ensemble mesurable B, c. q. f. d.

10. IX. 1926. O. Nikodym: *Exemple d'un ensemble plan fermé dont les points linéairement accessibles forment un ensemble non mesurable B.* Voir Fund. Math. IX.

24. IX. 1926. S. Mazurkiewicz: *Sur un problème concernant les ensembles A.*

M. M. donne un exemple d'une fonction $f(x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, dont l'image est complémentaire d'un ensemble (A), sans être un ensemble (A). Voir Fund. Math. X.

C. Kuratowski: *Sur les décompositions semi-continues d'ensembles fermés.*

Un ensemble E est décomposé en ensembles T, dits „tranches", d'une façon semi-continue, si ces ensembles sont disjoints et si la condition $T_0 \cdot \text{Lim inf } T_n \neq 0$ entraîne $\text{Lim sup } T_n \subset T_0$ (R. L. Moore, Trans. Am. M. Soc. 1925). La tranche T_0 est dite tranche de continuité, si la même condition entraîne: $\text{Lim } T_n = T_0$.

M. K. prouve que, dans l'hyper-espace des tranches, les tranches de discontinuité forment un ensemble F_σ de Ire catégorie. Si E est un continu de Jordan qui ne coupe pas le plan et si le nombre de dimensions de l'hyper-espace est 1, l'hyper-espace est une dendrite (Cf. Vietoris Proc. Akad. Amsterdam 1925, où E est la surface d'une sphère). Tout continu borné irréductible entre deux points admet une et une seule décomposition semi-continue linéaire ayant pour tranches des continus et qui ne puisse être poussée plus loin (c'est-à dire, que toute décomposition semi-continue linéaire à tranches continues s'en obtient en réunissant plusieurs tranches en une seule); si cette décomposition ne se réduit pas à un seul élément (comme p. ex. dans le cas de continu indécomposable), son type est celui de l'intervalle 01.

8. X. 1926 A. Rajchman: *Sur une classe des séries trigonométriques qui convergent presque partout vers zéro.*

Soit $n_1, n_2 \dots n_\varkappa \dots$ une suite d'entiers croissant assez rapidement soit $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_\varkappa$ une suite de nombres réels compris entre *zéro* et *un* soit $E_\varkappa$ l'ensemble de solutions de l'inégalité

(1) $\text{Red}\, n_\varkappa x = n_\varkappa x - [n_\varkappa x] =$ partie non entière de $n_\varkappa x \leqq \delta_\varkappa$

soit E la partie commune à tous les $E_\varkappa$

(2) $$E = E_1\, E_2 \dots E_\varkappa \dots .$$

On peut prouver par la méthode de la multiplication des séries trigonométriques, que pourvu que $\delta_\varkappa$ ne tende pas vers *un* quand $\varkappa \to \infty$, l'ensemble E est un ensemble *d'unicité trigonométrique*, c'est à dire qu'il n'existe pas des séries trigonométriques à coefficients non tous nuls qui converge en zéro partout en déhors de E. Ceci a été déjà montré par M. Rajchman dans Mathematische Annalen (Bd. 95 p. 389—408)

Dans la Communication présente il est prouvé. que la même méthode (celle de la multiplication) permet pour le cas $\lim\limits_{\varkappa \to \infty} \delta_\varkappa = 1$ de faire correspondre à E une série trigonométrique convergente vers zéro partout en déhors de E — c'est-à-dire de démontrer que dans ce cas E n'est pas un ensemble *d'unicité trigonométrique*.

Ce dernier résultat (même sous une forme plus générale) a été d'ailleurs trouvé antérieurement par M[lle] Nina Bary (Fundamenta Mathematicae vol. IX — sous la presse). La méthode qu'elle a employée est toute différente et parait plus compliquée.

15. X. 1926. C. Zarankiewicz: *Sur l'ensemble des points qui divisent un continu.*

M. Z. prouve que 1°: la fermeture d'un constituant de l'ensemble des points qui divisent un continu de Jordan est une dendrite; 2°: étant donnée une famille de constituants de l'ensemble des points qui divisent un continu de Jordan, si les diamètres de ces constituants sont $> \varepsilon > 0$, il existe une dendrite située dans ce continu et renfermant les constituants donnés.

26. XI. 1926. S. Kwietniewski: *Sur les problèmes de construction dans la Géométrie euclidienne.*

M. K. présente les postulats suivants:

Postulats de distinction.

D	Étant construits les points	satisfaisants à la condition	on peut distinguer, si ces points satisfont à la condition
I	A, B, C	—	a) $ABC \sim \varepsilon\delta_3$ b) $ABC \quad \varepsilon\delta_3$
II	A, B, C	$ABC \sim \varepsilon\delta_3$ $A \neq B \neq C \neq A$	a) A entre B et C b) B entre C et A c) C entre A et B

Postulats de construction.

C	Étant construits les points	satisfaisants à la condition	on peut construire les points	satisfaisants à la condition
I	$A_1, A_2 \dots A_r$	$A_1 A_2 \dots A_r \varepsilon \delta_r$	$A_{r+1}, A_{r+2} \dots A_n$	$A_1, A_2 \dots A_n \varepsilon \delta_n$ $n \geqq 3$
II	A, B, C	$ABC \varepsilon \delta_3$	X	$\overline{CX} \mid \overline{AB}$ $AB\overline{X} \sim \varepsilon \delta_3$
III	A, B, C, D	$ABC \varepsilon \delta_3$ $ABCD \sim \varepsilon \delta_4$ $C \neq D$ $\overline{AB} \sim \parallel \overline{CD}$	X	$ABX \sim \varepsilon \delta_3$ $CDX \sim \varepsilon \delta_3$
IV	A, B, C, D	$A \neq B \neq C \neq A$ $ABC \sim \varepsilon \delta_3$ $ABD \sim \varepsilon \delta_3$ X, Y existent	X, Y	$(XYAB) = -1$ $(XYCD) = -1$

Remarque. δ_n signifie un simplex de n points, c'est à dire un ensemble de points $Q_1 P_i (i = 1, 2 \dots, n-1)$ satisfaisants à la condition, que si Q_{r+1} $(r = 1, 2, \dots n-2)$ est colinéaire avec Q_r et P_r, alors $Q_{r+1} \neq P_{r+1}$. Pour les constructions planimétriques $n = 3$, pour les constructions stéréométriques $n = 4$. $\overline{AB}$ signifie la droite AB; $\overline{ABC}$ — le plan ABC.

M. K. signale plusieurs problèmes qui se laissent resoudre à l'aide de ces postulats.

3. XII. 1926. S. Mazurkiewicz: *Sur les ensembles n-dimensionnels ponctiformes.*

M. M. prouve l'existence d'un ensemble G_δ, n-dimensionnel, nulle part connexe (c'est-à-dire qui, pour tous deux points, peut être décomposé en deux parties séparées contenants resp. ces points). Ce résultat constitue la solution d'un problème posé par Urysohn (Fund. Math. VIII, p. 324 probl. $\varkappa$ et λ).

C. Kuratowski: *Sur l'application de la fonction de Pompeiù à la construction d'ensembles ponctiformes.*

I désignant l'image géométrique de la dérivée de la fonction de Pompeiù (Math. Ann. 63), 1°: l'ensemble I est un G_δ, ponctiforme et connexe (cf. Knaster et Kuratowski, Rend. di Palermo 49),

2⁰: l'ensemble $I - X$ (l'axe des abscisses) est un G_δ, nulle part connexe et de dimension 1 en chaque point, 3⁰: l'ensemble $I - X +$ un point arbitraire $(x_0, 0)$, n'appartenant pas à I, est un G_δ, dispersé (c.-à-d. ne contenant aucun sous-ensemble connexe) tout en étant connexe entre un certain couple de points.

10. XII. 1926. Z. Zalcwasser: *Sur le phénomène de Gibbs.*

L'ensemble de points où se présente le phénomène de Gibbs pour une série de Fourier partout convergente d'une fonction continue est un ensemble F_σ le plus général.

15. XII. 1926. J. R. Kline (Philadelphia): *Concerning Sense on Simple Closed Curves in Non metrical Plane Analysis Situs.*

The purpose is to give a new intentional definition of sameness of sense on simple closed curves in a space that is neither metrical, descriptive or separable but which satisfies a system of axioms Σ_3 proposed by Professor R. L. Moore in the Transactions of the American Mathematical Society. This system of axioms suffices to prove the greater part of the ordinary Jordan curve theory. The definition proposed is the following: The sense $A_1\ B_1\ C_1$ on the simple closed curve J_1 and the sense $A_2\ B_2\ C_2$ on the simple closed curve J_2 are said to be the same if there exists in the common exterior of J_1 and J_2 a simple closed curve J_3 and three points A_3, B_3 and C_3 thereon such that $A_1\ B_1\ C_1$ as well as $A_2\ B_2\ C_2$ can be simply joined to $A_3\ B_3\ C_3$. The points $A_1\ B_1\ C_1$ on J_1 and $A_3\ B_3\ C_3$ on J_3 are said to be simply joined if there exist three mutually exclusive arcs $A_1\ X\ A_3$, $B_1\ Y\ B_3$ and $C_1\ Z\ C_3$ which lie except for their end points in the common exterior of J_1 and J_3. It is shown that if the sense is the same for one choice of the simple closed curve J_3, then it is the same for every other choice. It is further shown that the ordinary properties of sameness of sense are obtained and that the sense reduces to the ordinary sense in the presence of metrical properties. In proving these properties a number of theorems, intrinsically interesting in Analysis Situs, are obtained.

R. G. Lubben: *Concerning the Separation of Plane Point Sets by Curves.*

Definitions: If K, H, and T are plane point sets and $K \cdot H = 0$, then the statement *H is not separated by K near T* is defined as follows: if P is a point of T and ε is a positive num-

ber, there exists a positive number $\delta_{\varepsilon P}$ such that if x and y are points of H whose distances from P are not greater than $\delta_{\varepsilon P}$, then there exists a connected point set C containing x and y such that $C.K = 0$, and that C contains no point whose distance from P is greater than ε. If K, H and M are point sets such that every connected point set which contains points of both K and H contains points of M, then M is said to separate K and H.

Theorem I. If K is a bounded continuum, D is a bounded complementary domain of K, H is a subset of D such that $\overline{H} = H + T$, where T is a subset of K and is totally disconnected, then in order that there exist a simple closed curve which separates H from $K - T$, it is necessary and sufficient that H should not be separated by K near T. [If it be specified in addition that $\overline{H}$ be connected, then the condition that H be a subset of a complementary domain of K is superfluous].

Theorem II. If K is a bounded continuum, T is a totally disconnected subset of K such that $K - T$ is the sum of two mutually separated point sets K_1 and K_2, x is a point of K_1 and y of K_2, then there exists a simple closed curve which separates x from y and whose product with K is a subset of T.

C. Kuratowski: *On closed curves and irreducible continua.*

It is shown that 1°: if A is a proper closed subset of an indecomposable bounded continu C such that A has points in common with each composant S of C then each product SA is composed of an infinite number of maximal connected sets; 2°: any bounded closed curve which decomposes the plane in more than two regions is an irreducible continu (a generalization of this theorem presents the solution of a problem proposed by Alexandroff in the Math. Annalen 1926).

17. XII. 1926. MM. A. Tarski et A. Lindenbaum: *Sur l'indépendance des notions primitives dans les systèmes mathématiques.*

M. T. fait part de certains résultats se rattachant à la méthode connue, dont l'auteur est M. Padoa[1]), et qu'on emploie dans la recherche de l'indépendance des notions primitives. Ces résultats (comme la méthode même de M. Padoa) ne s'appliquent qu'aux systèmes mathématiques au sens strict, c.-à-d. à ceux, où l'on sup-

---

[1]) Cf. p. ex.: L'Enseignement Mathématique 5 (1903), p. 85.

pose déjà la connaissance d'un système de la Logique et l'on ne se sert de „règles de procédé" outre de celles de la Logique. Le théorème principal de M. T. réduit complètement l'étude de l'indépendance des notions à l'étude de l'indépendance des propositions, fournit une base théorique à la méthode de M. Padoa et met en évidence sa généralité. En introduisant certaines hypothèses sur le nombre et le caractère des notions primitives (pour simplifier les raisonnements seulement), on peut formuler le théorème comme il suit:

I. Soit U un système d'axiomes ne contenant que deux termes primitifs, „R" et „S", dont le second désigne une relation binaire; soit U' — le système obtenu de U après y avoir remplacé le terme „S" par „S'"; soit U^* le système composé de tous les axiomes des systèmes U et U'; soit enfin P^* — la proposition suivante:

$$„x\,S\,y \,.\underset{x,\,y}{\equiv}.\, x\,S'\,y“.$$

Alors, pour que le terme „S" ne puisse pas être défini à l'aide du terme „R" seul (c. à. d. qu'il soit indépendant de „R") dans le système basé sur U, il faut et il suffit que la proposition P^* soit indépendante du système U^*.

En analysant I, M. T. est parvenu encore au théorème II, où l'expression „$A(\Sigma)$" remplace la proposition obtenue du produit logique des axiomes U, après y avoir substitué une variable „Σ" au lieu de „S".

II. Soit U le système remplissant les conditions de I. Si le terme „S" peut être défini — de quelque manière que ce soit — à l'aide du terme „R" dans le système U, la proposition P suivante, qui est alors une conséquence du système U peut servir aussi de définition:

$$„x\,S\,y \,.\underset{x,y}{\equiv}:\, A(\Sigma)\,.\supset_{\Sigma}.\, x\,\Sigma\,y“.$$

A l'aide de II, on obtient aisément une telle simplification de I que les systèmes U' et U^* deviennent superflus.

M. L. s'occupe de certains problèmes de l'indépendance des notions de géométrie euclidienne et d'arithmétique des nombres réels. Définissons:

$M(a,b,c,d)\,.\underset{a,b,c,d}{\equiv}.$ les paires a, b et c, d de points sont congruentes.

$P(a, b, c) \underset{a, b, c}{.\equiv.}$ le point b est situé entre a et c.

$H(a, b, c, d) \underset{a, b, c, d}{.\equiv.}$ les points a, b, c, d (dans cet ordre) sont harmoniques.

Dans la géométrie euclidienne à $n \geqslant 2$ dimensions, on peut avec M définir P et H; d'autre part, P et H ne suffisent pas et il est possible d'ailleurs de définir P à l'aide de H ou réciproquement. Le problème conduit cependant à un résultat différent dans la géométrie euclidienne à *une* dimension. Là, pour que le terme P soit indépendant du terme M, il faut et il suffit qu'il existe une fonction réelle F de variable réelle, non mesurable au sens de Lebesgue et remplissant certaines conditions. A l'aide de l'axiome du choix, on démontre qu'une telle fonction F existe, donc que le terme P *est indépendant* du terme M. Mais, si l'on rejette p. ex. l'existence des ensembles non mesurables, *on peut écrire* (effectivement) *une définition* correcte du terme P à l'aide de M.

Le terme M est dans le cas d'une seule dimension indépendant aussi de P, mais la notion „affine" H permet déjà de définir P et la notion „métrique" M, c.-à-d de développer toute la géométrie euclidienne à une dimension.

L'arithmétique des nombres réels peut être basée sur les termes: $1, +$ et $<$. Le problème, si le dernier terme et définable à l'aide de deux autres, est équivalent de nouveau au problème de l'existence des fonctions F.

M. L. énonce encore quelques résultats du même genre (pour la géométrie projective p. ex.).

A. Rajchman: *Remarque sur un article de M. Knopp.*

État
de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1926.

Président: M. Z. Krygowski.
Vice-Présidents: MM. M. Huber et S. Zaremba.
Secrétaire: M. S. Malecki.
Vice-Sècrétaire: M S. K. Zaremba.
Trésorier: M. A. Wilk.
Autres Membres du Bureau: MM. A. Hoborski, A. Rosenblatt et W. Wilkosz.
Commission de Contrôle: MM. K. Fijoł, G Leśnodorski et S. Zakrocki.
Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. M. Huber, la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, présidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno, présidée par M. W. Staniewicz.

Liste des Membres de la Société.

Malgré le soin avec lequel cette liste a été établie, certaines fautes ont pu s'y glisser; M. M. les Membres sont priés instamment de vouloir bien envoyer les rectifications au Secrétaire (Cracovie, rue Gołębia 20, Institut de Mathématique).

Abbréviations: L - membre de la Section de Lwów, Wa — membre de la Section de Varsovie, P — membre de la Section de Poznań, Wl — membre de la Section de Wilno.

Dr. Kazimierz Abramowicz (P), Poznań, ul. Wyspiańskiego 8.
Herman Auerbach (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Bohdan Babski, Grudziądz, ul. ks. Budkiewicza 22.
Prof. Dr. Stefan Banach (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Prof. Tadeusz Banachiewicz, Kraków, Obserwatorjum Astronomiczne, ul. Kopernika 25.
Jan Baran, Toruń, Gimnazjum Męskie, Małe Garbary.
Prof. Dr. Kazimierz Bartel (L), Lwów, Politechnika.
Prof. Dr. Czesław Białobrzeski, Warszawa, ul Hoża 69.
Inż. Dr. Izydor Blumenfeld (L), Lwów, ul. Franciszkańska 4.
Dr. Georges Bouligand, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers, Poitiers (France), 50, rue Renaudot.

Dr. Stefan Bóbr (Wa), Warszawa, Aleje Jerozolimskie 9 m. 23.
Dr. Łucjan Böttcher (L), Lwów, Politechnika.
Franciszek Brablec, Kraków, ul. Studencka 4.
Dr. Élie Cartan, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, Le Chesnay (Seine-et-Oise, France), 27, Avenue de Montespan.
Dr. Juljan Chmiel, Kraków, ul. Św. Tomasza 33.
Antoni Chromiński (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej
Dr. Leon Chwistek, Kraków, ul. Szujskiego 7.
Dr. Jakób Cukierman (Wl), Wilno, ul. Kasztanowa 3.
Dr. Kazimierz Cwojdziński (P), Poznań, ul. Grottgera 5.
Jadwiga Czarnecka (P), Przybysław, poczta Żerków (województwo Poznańskie).
Dr. Bohdan Debryng, Warszawa ul. Topolowa, Wojenna Szkoła Inżynierji.
Prof. Dr. Samuel Dickstein (Wa), Warszawa, ul. Marszałkowska 117.
Gerhard Długowski, Toruń, Oficerska Szkoła Artylerji, Koszary Skrzyneckiego.
Dr. Stanisław Dobrowolski (Wa), Milanówek pod Warszawą, willa Zosinek.
Prof. Dr. Wacław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 13.
Prof. Dr. Władysław Dziewulski (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 15.
Prof. Dr. Placyd Dziwiński (L), Lwów, Politechnika.
Prof. Dr. Marcin Ernst (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Kazimierz Fijoł, Kraków-Podgórze ul. Józefińska 31.
Dr. Paul Flamant, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de l'Université de Strasbourg, Strasbourg (France), 31, Avenue de la Forêt-Noire.
Mirosław Gibas, Kraków, ul. Krupnicza 28.
Dr. Stefan Glass (Wl), Wilno, Wielka Pohulanka 6.
Stanisław Gołąb, Kraków, ul. Lenartowicza 12.
Prof. Dr. Łucjan Grabowski (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Henryk Greniewski, Warszawa, ul. Królewska 23.
Dr. Aleksander Grużewski (Wa), Warszawa, ul. Poznańska 14 m 7.
Prof. Dr Antoni Hoborski, Kraków, ul. Smoleńska 26.
Marja Hommé (L), Lwów, ul. Św. Jacka, Gimn. SS. Urszulanek.
Ks. Feliks Hortyński, Kraków, ul. Kopernika 26.
Prof. Dr. Maksymiljan Huber (L), Lwów, Politechnika.

Zenon Jagodziński (Wa), Warszawa, Politechnika, Wydział Inżynierji Lądowej.
Wincenty Janik, Kraków, Plac na Groblach, Gimn. Św. Anny.
Prof. Dr. Kazimierz Jantzen (Wl), Wilno, ul. Zakretowa 9.
Dr. Stefan Kaczmarz (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Stanisław Kalandyk (P), Poznań, ul Słowackiego 29.
Dr. Bazyli Kalicun (L), Lwów, ul. Batorego, Gimnazjum I.
Dr. Joseph Kampé de Fériet, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille, Lille (France), 16, rue des Jardins.
Inż. Ludwik Kaszycki, Kraków, ul. Garbarska 4.
Prof. Dr. Stefan Kempisty (Wl., Wilno, ul. Wielka 24.
Dr. Michał Kerner (Wa), Warszawa, ul. Pańska 20.
Stefania Klawekówna (P), Poznań, ul. Młyńska 11.
Doc. Dr. Bronisław Knaster (Wa), Warszawa, ul. Żórawia 24A.
Zygmunt Kobrzyński (Wa), Nowy-Świat 22 m. 8.
Prof. Dr. Zdzisław Krygowski (P), Poznań, ul, Głogowska 74/5.
Dr. Marjan Kryzan (P), Poznań, ul. Krasińskiego 9.
Doc. Dr. Kazimierz Kuratowski (Wa), Warszawa, ul. Trębacka 10.
Dr. Stefan Kwietniewski (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 73.
Prof. Dr. Franciszek Leja (Wa), Warszawa, Politechnika, Gmach Gł.
Prof. Dr. Stanisław Leśniewski (Wa), Warszawa, ul. Brzozowa 12.
Gustaw Leśnodorski Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Władysław Lichtenberg (L), Lwów, Politechnika.
Prof. Dr. Leon Lichtenstein (Wa), Leipzig (Deutschland), Grossgörschenstrasse 3.
Adolf Lindenbaum (Wa), Warszawa, ul. Złota 45.
Prof Dr. Stanisław Loria (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Prof. Dr. Antoni Łomnicki (L), Lwów, Politechnika.
Prof. Dr. Jan Łukasiewicz (Wa), Warszawa, Brzozowa 12.
Prof. Dr Mikołaj Łuzin (Wa), Moscou (U. R. S. S.), Arbat 25/8.
Władysław Majewski, Lwów, ul. Kadecka 1, Korpus Kadetów.
Dr. Adam Maksymowicz (L), Lwów Politechnika
Stanisław Malecki, Kraków, ul. Długa 50.
Andrzej Marconi (P), Poznań, ul Kosińskiego 26.
Prof. Dr. Stefan Mazurkiewicz (Wa), Warszawa, ul. Oboźna 11.
Inż. Dr. Meyer. Lwów, ul. Franciszkańska 4.
Władysław Moroń (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Zofja Napadiewiczówna (L), Lwów, ul. Chorążczyzny, Gimnazjum żeńskie.

Dr. Jerzy Spława Neyman (Wa), Warszawa, ul. Miodowa 23, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego.
Dr. Władysław Nikliborc (L), Lwów, Politechnika.
Dr. Otton Nikodym, Kraków, ul. Kochanowskiego 23.
Dr. Stanisława Nikodymowa (Wa), Kraków, ul. Kochanowskiego 23.
Władysław Orlicz (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Józef Orłowski (P), Poznań, ul. Matejki 44.
Ludwik Ostrzeniewski (P), Poznań, ul. Ogrodowa 2.
Inż. Jan Pankalla (P), Poznań, ul. Ratajczaka 12.
Dr. Aleksander Pareński (L), Lwów, ul. Szeptyckich 10.
Prof. Dr. Józef Patkowski (Wl), Wilno, ul. Nowogrodzka 22.
Prof. Dr. Tadeusz Pęczalski (P), Poznań, ul. Krasińskiego 14.
Dr. Antoni Plamitzer (L), Lwów, Politechnika.
Prof. Dr. Antoni Przeborski (Wa), Warszawa. Nowy Zjazd 5.
Inż. Józef Przygodzki (P), Poznań, ul. Rybaki, Szkoła Budowlana.
Doc. Dr. Aleksander Rajchman (Wa), Warszawa, ul. Zajęcza 7.
Prof. Dr. Alfred Rosenblatt, Kraków, ul. Krowoderska 47.
Stefan Rozental, Kraków, ul. Sobieskiego 10.
Antoni Rozmus, Zakopane, Gimnazjum.
Prof. Dr. Juljusz Rudnicki (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 22.
Prof. Dr. Stanisław Ruziewicz (L), Lwów, Uniw. Jana Kazimierza.
Walerja Sabatowska (L), Lwów, ul. Zielona, Gimn. Strzałkowskiej.
Doc. Dr. Stanisław Saks (Wa), Warszawa, Politechnika.
Dr. Juljusz Schauder (L), Przemyślany, Gimnazjum.
Lidja Seipellówna (P), Poznań, ul. Gajowa 4.
Prof. Dr. Wacław Sierpiński (Wa), Warszawa, ul. Hoża 50 m. 52.
Prof. Dr. Jan Sleszyński, Kraków, ul. Wygoda 7.
Kazimierz Smoliński (P), Poznań, ul. Żupańskiego 16.
Helena Smoluchowska (P), Poznań, ul. Chełmońskiego 8.
Władysław Smosarski (P), Poznań, ul. Karczewskiego 14.
Jan Sobaszek (P), Poznań, Szkoła budowy maszyn.
Dr. Edward Stamm, Ciechanów, Gimnazjum Państwowe
Prof. Dr. Wiktor Staniewicz (Wl), Wilno, ul. Uniwersytecka 7.
Ksawery Stankiewicz, Kraków, ul. Długa 50.
Prof. Dr. Hugo Steinhaus (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Prof. Dr. Włodzimierz Stożek (L), Lwów, ul. Ujejskiego 1.
Doc. Dr. Stefan Straszewicz (Wa), Warszawa-Mokotów, ul. Rejtana 17.
Dr. Piotr Szymański (Wa), Warszawa, ul. Ks. Skorupki 12 m. 11.
Władysław Ślebodziński (P), Poznań, ul. Głogowska 51.

Doc. Dr. Alfred Tarski (Wa), Warszawa, ul. Koszykowa 51.
Henryk Titz, Kraków, ul. Św. Tomasza 27.
Andrzej Turowicz, Kraków, ul. Sobieskiego 7.
Dr. Włodz. Urbański, Kraków-Podgórze, ul. Krzemionki, Ak. Górn.
Inż. Kazimierz Vetulani, Kraków, ul. Smoleńska 14.
Dr. Walfisz (Wa), Warszawa, ul. Wspólna 3a m. 10.
Dr. Tadeusz Ważewski, Kraków, ul. Św. Jana 20.
Dr. Kasper Weigel (L), Lwów, Politechnika.
Sala Weinlösówna (L), Lwów, Uniwersytet Jana Kazimierza.
Prof. Dr. Jan Weyssenhoff (Wl), Wilno, ul. Zamkowa 11.
Leopold Węgrzynowicz, Kraków, Wawel 7.
Marjan Węgrzynowicz (P), Poznań, ul. Łazarska 2a.
Dr. Antoni Wilk. Kraków, ul. Wybickiego 4.
Prof. Dr. Witold Wilkosz, Kraków, ul. Zyblikiewicza, dom P. K. O.
Irena Wilkoszowa, Kraków, ul. Zyblikiewicza, dom P. K. O.
Dr. Franciszek Włodarski (P), Poznań, Przecznica 6.
Stanisław Zakrocki, Kraków, ul. Smoleńska 21.
Zygmunt Zalcwasser (Wa), Warszawa, ul. Leszno 51.
Dr. Bohdan Zaleski (P), Poznań, ul. Palacza 64A.
Dr. Kaz. Zarankiewicz (Wa), Warszawa, ul. Śniadeckich 18 m. 9.
Prof. Dr. Stanisław Zaremba, Kraków, ul. Żytnia 6.
Stanisław Krystyn Zaremba, Kraków, ul. Żytnia 6.
Michał Zarzycki (L), Lwów, Gimnazjum ruskie.
Dr. Zygmunt Zawirski (L), Lwów, Politechnika.
Doc. Dr. Antoni Zygmund (Wa), Warszawa, ul. Złota 83 m. 8.
Prof. Dr. Kazimierz Żorawski (Wa), Warszawa, Nowy-Zjazd 5.
Prof. Dr. Eustachy Żyliński (L), Lwów, Uniw. Jana Kazimierza.

Membres dont les adresses manquent.

Władysław Bogucki.
Dr. Celestyn Burstin (L).
Zofja Starosolska (L).
Karol Szczepanowski.



Membre décédé.

† Roman Negrusz (L), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Léopol (Lwów).

Table des matières.



